بنام خداوند جان و خرد

دانشگاه سمنان

عنوان

دست نوشته های ریاضی مهندسی

مدرس:

محمدصادق ولی پور

اسفند ۱۳۹۸

Fourier Series: are infinite series designed to represent general periodic functions in terms of simple ones, namely sines and cosines.

Periodic function: $f(x)$ is periodic if $f(x)$ is defined for all real x, if there is some positive number P such that

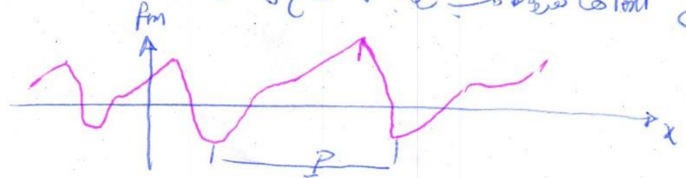
$$f(x+P) = f(x) \quad , P>0$$

عدد P را دوره تناوب گویند

- کوچکترین P را دوره تناوب گویند

اصلی یا پایه

- بعضی Text ها دوره تناوب را با T نشان می‌دهند

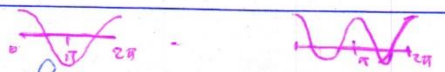


★ if $f(x)$ has period, P, it also has the period $2P$:

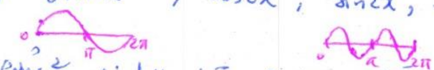
$$f(x+2P) = f[(x+P)+P] = f(x+P) = f(x)$$

$$f(x+nP) = f(x) \qquad n := 1, 2, \ldots \quad \text{any integer}$$

★ if $f(x)$ & $g(x)$ have period P, then $af(x)+bg(x)$ has period P (a, b are arbitrary constant)



$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \sin nx$ (I)



هر یک این توابع دارای دوره تناوب 2π هستند بنابراین سری تشکیل شده زیر نیز دارای دوره تناوب 2π است.

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{(II)} \checkmark$$

$a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ ثابت بوده و ضرایب سری نامیده می‌شوند.

- Now, suppose that $f(x)$ is a given function of Period 2π, and is such that it can be represented by a series of trigonometrie systeam likeas (II)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- حال چگونه ضرایب را محاسبه کنیم؟

تعاریف: مجموعه توابع $\{\phi_n(x)\}$ را نسبت به تابع وزنی $q(x)$ در فاصله $[a,b]$ متعامد گویند اگر $\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x) q(x)\, dx = 0$ $m \neq n$ اگر $m=n$

$\|\phi_n\| = \left[\int_a^b \phi_n^2 q\, dx\right]^{1/2}$

قضیه: Theorem: Orthogonality of the Trigonometric System:

. مجموعه توابع مثلثاتی $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ مجموعه متعامد است در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ (یا هر بازه‌ای که به طول 2π باشد مثل $0 \leq x \leq 2\pi$)؛ زیرا که

انتگرال حاصلضرب هر دو تابع از این مجموعه در این بازه صفر است برای هر عدد صحیح n, m.

8.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

۹۲/۷/۱ (۰۰۱-) تمرین

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \text{ or } \sin mx\, dx = 0 \qquad \text{for any } m, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & m = n \end{cases} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx = 0 \qquad \text{for any } m \text{ and } n$$

So:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \dots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \dots \quad (\text{III})$$

از طرفین در فاصله $[-\pi, \pi]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + a_1 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x}^{\,0} + \cancel{\dots}^{\,0} + b_1 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \sin x}^{\,0} + \cancel{\dots}^{\,0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = (2\pi) a_0 \longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

طرفین رابطه III را در $\cos mx$ ضرب کرده و از π تا $-\pi$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\, dx \right] \cos mx\, dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx\, dx}_{0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx\, dx}_{0 \text{ Except for } m=n} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos mx\, dx}_{0}$$

$$= a_m(\pi)$$

$\sin^n$ ... $\int \cos nx = \frac{1}{n}\sin x$

V

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx$$

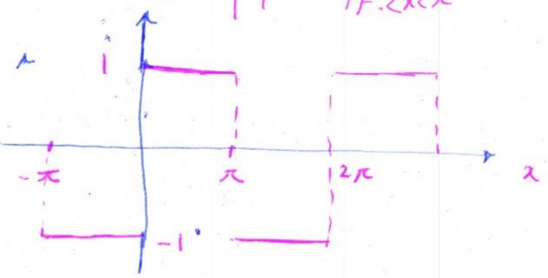
به طریق مشابه طرفین تساوی را در $\sin mx$ ضرب کرده و در بازه $[-\pi,\pi]$ انتگرال می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx$$

به این ضرایب، ضرایب اویلر و به این بسط، بسط فوریه گویند.

Example: Find the Fourier Coefficient of the Periodic function $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{and } f(x+2\pi) = f(x)$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\{[-\pi]+\pi\right\} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int -\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

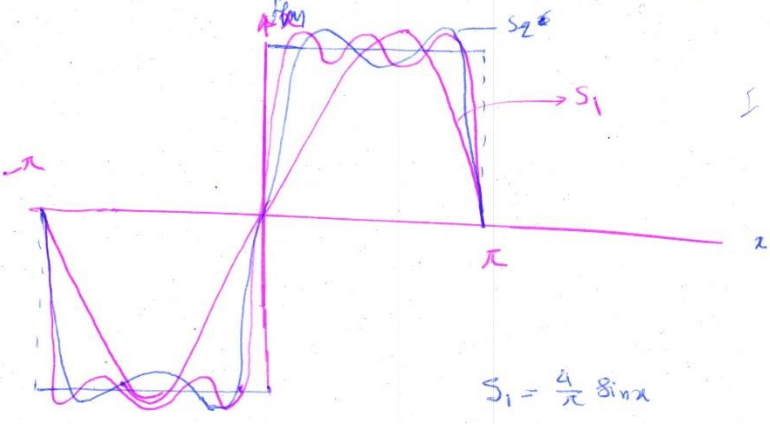
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right]$$



$S_1 = \frac{4}{\pi}\sin x$

$S_2 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right)$

$S_3 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$

Note: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right)$

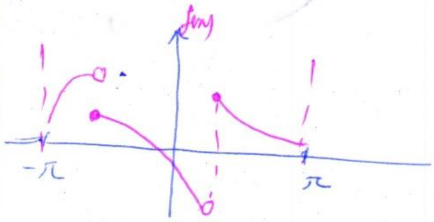
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

بنابراین مجموع این سری در همه جا با حاصل تابع f(x) برابر است بجز در نقاط ناپیوستگی که مقدار میانگین تابع خواهد بود.

You may prove that: $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

- شرایط لازم برای همگرایی سری فوریه یک تابع مشخص نیست اما شرایط کافی متعددی موجود است. (در مرجع)

قضیه: تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π را در نظر بگیرید. اگر $f(x)$ به طور تکه‌ای در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته باشد (Sectionally Continus یا Piecewise Continuous) و در هر نقطه در فاصله $[-\pi, \pi]$ دارای مشتق چپ و راست باشد در این صورت سری فوریه آن همگراست و جمع سری برابر $f(x)$ خواهد بود بجز در نقاط ناپیوستگی x_0 که در این نقاط حاصل جمع سری برابر $\frac{f(x_{0+})+f(x_{0-})}{2}$ خواهد بود (جهش در واقع میانگین جهش در x_0)



We prove Convergence for a Continuous function $f(x)$ having Continus first and second derivatives.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{\cos nx \, dx}_{dv} = \frac{1}{\pi} \cancel{\left(f(x) \frac{1}{n} \sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \, f'(x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{u} \underbrace{\sin nx \, dx}_{dv}$$

$dv = \cos nx \, dx$,
$v = \frac{1}{n} \sin nx$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} \cancel{f'(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx\, dx$$

$f(x)$ متناوب با 2π $f'(x)$ نیز متناوب است

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx\, dx \right|$$

Since f'' is Continuous in the interval of integration, we have

$$|f''(x)| < M \rightarrow M \text{ is a appropriate Constant}$$

Furthermore, $|\cos nx| \leq 1$ So

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\, dx\right| \leq \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\, dx = \frac{2M}{n^2}$$

به همین ترتیب اندازه b_n نیز برابر است $|b_n| \leq \frac{2M}{n^2}$ و

$$f(x) \leq |a_0| + 2M\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

پس سری فوریه نیز همگراست .

Functions of any Period $P = \cancel{2\pi}$

اگر تابع متناوب به جای 2π دوره تناوب T باشد و $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد

$$f(t) : \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

اگر در سری فوریه که قبلاً برای تابع متناوب $[-\pi, \pi]$ بدست آوردیم .

$$\text{if } x = \frac{2\pi}{T}t \Longrightarrow t = -\frac{T}{2} \rightarrow x = -\pi$$

$$t = \frac{T}{2} \longrightarrow x = \pi$$

$$\rightarrow f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} \cdot \frac{2\pi}{T} dt$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} n t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi}{T} n t \, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$f(x) = a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x\right)$$

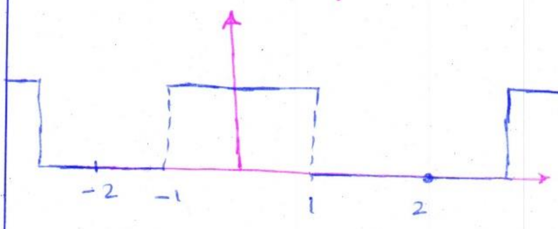
$$\text{if } T = 2L \rightarrow a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Example: Find the Fourier Series of the function

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$



Solution: $T = 2l = 4 \longrightarrow l = 2$

$$\rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2\times 2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,dx = \frac{2k}{4} = k/2$$

$$\boxed{a_0 = \frac{k}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-2}^{1} \cancel{f(x)}^{\,0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2} \cancel{f(x)}^{\,0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{k}{2}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0 & \text{if } n = \text{even},\ 0, 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2k}{n\pi} & \text{if } n = \text{odd},\ 1, 5, 9 \dots \\ -\frac{2k}{n\pi} & \text{if } n = \text{''}\ \ 3, 7, 11 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - + \dots\right.$$

اثبات تساوی پارسوال

$$2a_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2 dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_1^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

طرفین در $f(x)$ ضرب می‌شود

$$\{f(x)\}^2 = a_0 f(x) + \sum_1^{\infty}\left(a_n f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

از طرفین در بازه $[-l,l]$ انتگرال می‌گیریم

$$\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2 = a_0\int_{-l}^{l}f(x)\,dx + \sum_1^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx + b_n\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$= (2la_0)\cdot a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cdot a_n(l) + b_n(l)\cdot b_n)$$

$$= 2la_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)l$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{f(x)\}^2 dx = 2a_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} \rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\{[0+\pi] + \pi\} = \boxed{2}$$

$$2 = \sum_1^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)^2$$

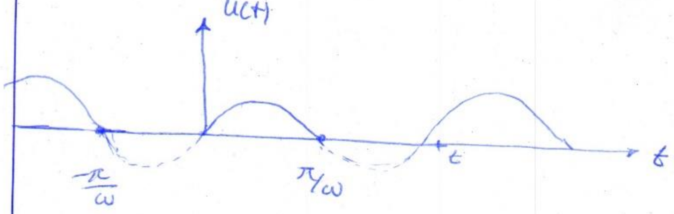
$n = \text{odd} \longrightarrow 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\times 4}{n^2\pi^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

دقت n [illegible]

$n = \text{even}$: صفر است

Example: Find the Fourier Series of the resulting Periodic function

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } -l < t < 0 \\ E \sin \omega t & \text{if } 0 < t < l \end{cases}$$



Solution: $T = 2l = \frac{2\pi}{\omega}$, $\boxed{l = \frac{\pi}{\omega}}$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} \cancel{f(t)}\,dt + \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{\pi/\omega} f(t)\,dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t = \frac{\omega E}{2\pi \omega}\Big[-\cos \omega t\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E}{2\pi}\Big[-\cos \pi + \cos 0\Big] = \boxed{\frac{E}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\,dt = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \cos n\omega t\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n\omega t$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \Big[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\Big]\,dt$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi}\left[\left(\frac{-1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\omega t - \frac{1}{(1-n)\omega}\cos \omega t(1-n)\right)_0^{\frac{\pi}{\omega}}\right]$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi}\left[\frac{-1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\pi - \frac{1}{\omega(1-n)}\cos(1-n)\pi + \frac{1}{(1+n)\omega} + \frac{1}{(1-n)\omega}\right]$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right] = \begin{cases} n = \text{odd}, & 0 \\ n\ \text{even} = & \frac{-2E}{(n-1)(n+1)\pi} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\sin n\omega t\, dt$$

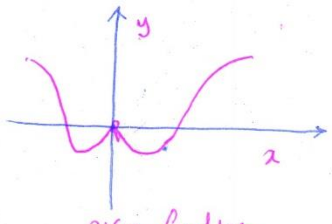
$$= \frac{\omega E}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\omega t \sin n\omega t\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ \frac{E}{2} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1.3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3.5}\cos 4\omega t + \dots\right)$$

Even & odd functions.

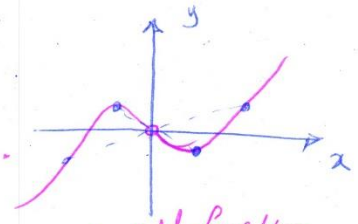
if $f(x) = f(-x)$ so that, $f(x)$ is even and has only Cosine terms. for its Fourier Series.

if $f(x) = -f(-x)$ so that, $f(x)$ is odd and has only Since terms for its Fourier Series.



even function

نسبت به محور yها تقارن دارند



odd function

نسبت به مبدا تقارن دارند

در حالت کلی $f(x)$ می‌تواند نه زوج باشد و نه فرد باشد

$$f(x) = \underbrace{f_e(x)}_{\text{زوج}} + \underbrace{f_o(x)}_{\text{فرد}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$f(-x) = f_e(-x) + f_o(-x) = f_e(x) - f_o(x) \qquad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \longrightarrow f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad , \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

تابع زوج = تابع زوج × تابع زوج

تابع فرد = تابع زوج × تابع فرد

تابع زوج = تابع فرد × تابع فرد

When f is even and with period 2ℓ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \ , \ n = 1, 2, \dots$$

چون

$$\int_{-a}^{a} f_e(x)\, dx = 2 \int_0^{a} f_e(x)\, dx \quad , \quad \int_{-a}^{a} f_o(x)\, dx = 0$$

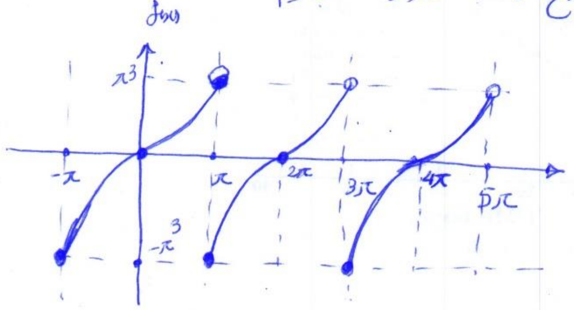
When f is odd and with period 2ℓ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad , \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx.$$

F-1

مثال: $f(x)=x^3$ را بصورت تناوب 2π در فاصله $[-\pi,\pi]$ تناوبی کنید و مقدار تابع سری فوریه آن را در نقاط ناپیوستگی بدست آورید.

* اگر $f(x)$ ذاتاً تناوبی نباشد، می‌توان آن را به اختیار خود تناوبی کنیم.



$$\left\{ f(x)=x^3 \longrightarrow g(x)=x \longrightarrow g(f(x))=x^3 \longrightarrow g[f(x)+2\pi]=x^3+2\pi=g(f(x)) = x^3 \right\}$$

$f(x)$ in $[-\pi,\pi]$ is odd $\longrightarrow a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x^3}{n}\cos nx+\frac{3x^2}{n^2}\sin nx+\frac{6x}{n^3}\cos nx-\frac{6}{n^4}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^n}{n^3}(6-n^2\pi^2)$$

$$\rightarrow x^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^3}(6-n^2\pi^2)\sin nx\ ,\quad f(\pi)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$$

$$=\frac{\pi^3-\pi^3}{2}=0$$

بنابراین در نقاط ناپیوستگی $f=0$ می‌باشد.

Kronecker formula

let $p(x)$ be a polynomial of degree m, and suppose that $f(x)$ is continuous. Then except for an arbitrary additive constant:

$$\int p(x) f(x) = PF_1 - P'F_2 + P''F_3 - \cdots + (-1)^m P^{(m)} F_{m+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n P^{(n)} F_{n+1}$$

از P به صورت پشت سر هم مشتق گرفته می‌شود تا به صفر برسد.

F_1 انتگرال نامعین f بوده

F_2 " " F_1 بوده و الی آخر.

نکته: مشتق P از جمله دوم شروع می‌شود. ولی انتگرال f از جمله اول شروع می‌شود.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[(x^3)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (3x^2)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + 6x\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) - 6\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)\right]_0^{\pi}$$

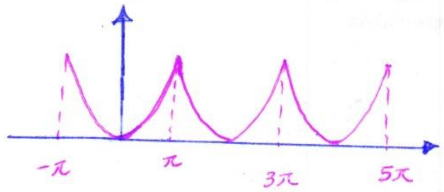
$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi^3\left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right) + 6\pi\left(\frac{\cos n\pi}{n^3}\right)\right] - 0$$

$$= 2\left[\frac{-\pi^2}{n}(\cos n\pi) + \frac{6}{n^3}\cos n\pi\right] = -2\cos n\pi\left[\frac{(n\pi)^2 - 6}{n^3}\right]$$

$$= -2(-1)^n\left[\frac{(n\pi)^2 - 6}{n^3}\right]$$

$$= 2(-1)^{n+1}\left[\frac{(n\pi)^2 - 6}{n^3}\right]$$

سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ را در فاصله $[-\pi,\pi]$ و دوره تناوب 2π را بدست آورید:



چون تابع $f(x)=x^2$ زوج است پس b_n صفر می‌شود داریم:

$$f(x)=x^2=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

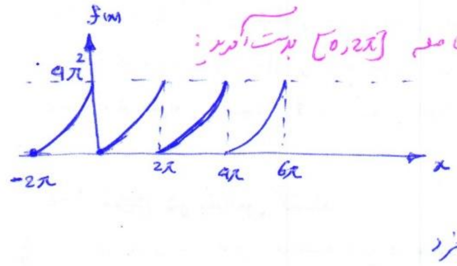
$$a_n=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

$$f(\pi)=\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\pi^2-\frac{\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\rightarrow\frac{2\pi^2}{3}=4\sum\frac{1}{n^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ را با دوره تناوب 2π در فاصله $[0,2\pi]$ بدست آورید:



تابع $f(x)$ در فاصله $[0,2\pi]$ نه زوج است نه فرد

$$f(x)=x^2=a_0+\sum\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{\pi}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{2\pi}$$

F-F'

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\times 2\pi}{n^2}\cos 2n\pi - 0\right] = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-4\pi^2}{n}\cos 2\pi n + \frac{2}{n^3}\cos 2\pi n - \frac{2}{n^3}\right]$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

نکته: شکل سری فوریه یک تابع بستگی به فاصله انتخاب شده دارد.

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos n\pi - \cancel{\frac{4\pi}{n}\sin n\pi}^{\,0}\right)$$

$$\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n$$

$$-\frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}(-1)^n$$

$$+\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^{n+1}$$

تذکر: هرگاه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[-\pi, \pi]$ دارای سری فوریه باشند آنگاه می‌توان از طرفین آن انتگرال گرفت.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \int_{\xi}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[a_n(\sin nx - \sin n\xi) + b_n(\cos n\xi - \cos nx)\right]$$

$$x, \xi \in [-\pi, \pi]$$

The integrated Series is not, however, a Fourier Series if $a_0 \neq 0$; for it Contans a term $a_0 x$

برای اثبات به کتاب "Fourier Series and boundary value problem" صفحه 93 مراجعه نمائید.

مشتق سری فوریه

در مورد مشتق سری فوریه مسئله به هیچ وجه ساده نمی‌باشد ~~[illegible]~~ و بایستی تابع بر خصوصیات زیادتری [illegible] بتوان از طرفین سری فوریه مشتق گرفت به طوری که حاصل، سری فوریه مشتق تابع باشد

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

$$f'(x) = 0 = \frac{4}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots)$$

این سری همگراست بنابراین به 8

قضیه: اگر تابع f در فاصله $-\pi<x<\pi$ پیوسته و $f(\pi)=f(-\pi)$ باشد

و f' نیز یک به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد در فاصله $(-\pi,\pi)$ آنگاه سری فوریه

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

قابل مشتق‌گیری در هر نقطه x که $-\pi<x<\pi$ باشد بوده که در آن $f''(x)$ موجود باشد

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)$$

برای اثبات رجوع به کتب [illegible] شود.

?

F-۷'

سری فوریه $f(x) = \sin \alpha x$ که $\alpha \in R$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[-\pi, \pi]$ بدست آورید

چون تابع $\sin \alpha x$ فرد است در فاصله $[-\pi, \pi]$ پس a_0 و a_n صفر خواهند بود.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad , \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin \alpha x \sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left[\cos(\alpha-n)x - \cos(\alpha+n)x\right] dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} - \frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2n(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{(\alpha-n)} - \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{(\alpha+n)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin \alpha\pi \cos n\pi - \cancel{\sin n\pi} \cos \alpha\pi}{(\alpha-n)} - \frac{\sin \alpha\pi \cos n\pi + \cos \alpha\pi \cancel{\sin n\pi}}{(\alpha+n)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \sin \alpha\pi}{(\alpha-n)} - \frac{(-1)^n \sin \alpha\pi}{\alpha+n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \sin \alpha\pi(\alpha+n) - (-1)^n \sin \alpha\pi(\alpha-n)}{\alpha^2-n^2}\right] = \frac{(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}(2n)$$

$$= \frac{2n(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)} \sin nx$$

F-۸′

هرگاه $\alpha \neq 0$ عدد حقیقی باشد مطلوبست محاسبه سری فوریه تابع $f(x)=\cos\alpha x$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ و

محاسبه $\csc\alpha\pi$ از روی آن.

$\cos\alpha x$ is even function on $[-\pi,\pi]$ so $b_n=0$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \longrightarrow \quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\Big|_0^{\pi}=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(\alpha-n)}\sin(\alpha-n)x+\frac{1}{(\alpha+n)}\sin(\alpha+n)x\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right]=\frac{(-1)^n 2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$$\cos\alpha x=f(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2}$$

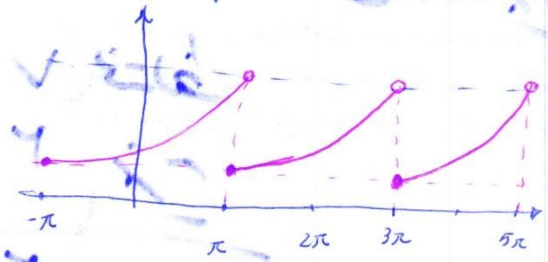
$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\left[1+2\alpha^2\sum\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2}\right]$$

$$f(0)=\cos 0=1=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\left[1+2\alpha^2\sum\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha\pi)}=\csc(\alpha\pi)=\frac{1}{\alpha\pi}+\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

F-۹

مطلوبست محاسبه سری فوریه $e^{-\alpha x}$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ و از روی آن $\coth \alpha\pi$ برحسب سری:



$$\int e^{\alpha x}\cos nx\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}\left(\alpha\cos nx + n\sin nx\right)$$

$$\int e^{\alpha x}\sin nx\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}\left[\alpha\sin nx - n\cos nx\right)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\cos nx\,dx = \left\{\frac{e^{-\alpha x}}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left[-\alpha\cos nx + n\sin nx\right]\right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left\{\frac{e^{-\alpha\pi}}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left[-\alpha\cos n\pi + n\cancel{\sin n\pi}\right] - \frac{e^{+\alpha\pi}\left[-\alpha\cos(-n\pi) + n\cancel{\sin(-n\pi)}\right]}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right.$$

$$= \left\{\frac{\cancel{e^{\alpha\pi}}}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left[\alpha\cos n\pi\, e^{+\alpha\pi} - \alpha\cos n\pi\, e^{-\alpha\pi}\right]\right.$$

$$= \frac{\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{-\alpha\pi 2}\left[e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}\right] = \frac{1}{2\alpha\pi}\left[e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right]$$

F-10'

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\sin nx\,dx = \left\{ \frac{e^{-\alpha x}}{\pi(n^2+\alpha^2)}\left[-\alpha\sin nx - n\cos nx\right] \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{n(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left[e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right]$$

$$f(x) = e^{-\alpha x} = \left[e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right]\left\{ \frac{1}{2\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\cos nx + \frac{n(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\sin nx \right) \right\}$$

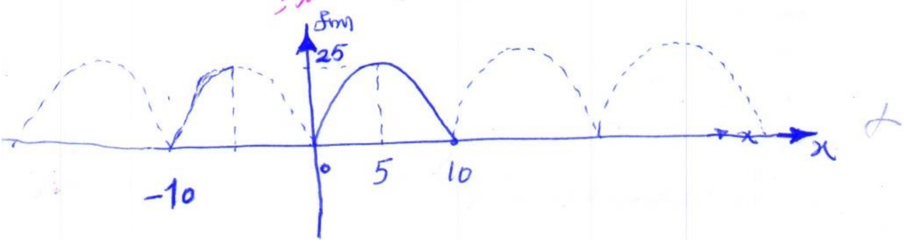
مشاهده می‌شود که تابع در نقطهٔ $x=\pi$ ناپیوستگی دارد و چون سری فوریه در نقاط ناپیوستگی مقدار $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ را می‌دهد در نتیجه در نقطهٔ $x=\pi$ خواهیم داشت:

$$f(\pi) = \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2} = \frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{2}\left\{ \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)} \right.$$

$$\cosh\alpha\pi = \sinh\alpha\pi\left\{ \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)} \right.$$

$$\coth\alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}$$

تمرین - سری فوریه تابع $f(x) = x(10-x)$ را در فاصله $0 < x < 10$ بدست آورید.



توضیح: The Fourier Coefficients of a Sum $f_1 + f_2$ are the sums of the Corresponding Fourier Coefficients of f_1 and f_2.

the Fourier Coefficients of cf are c times the Corresponding Fourier Coefficients of f.

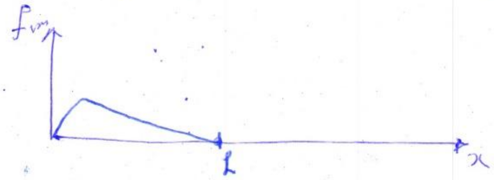
$f(x) = x + \pi \quad \text{if } -\pi < x < \pi$

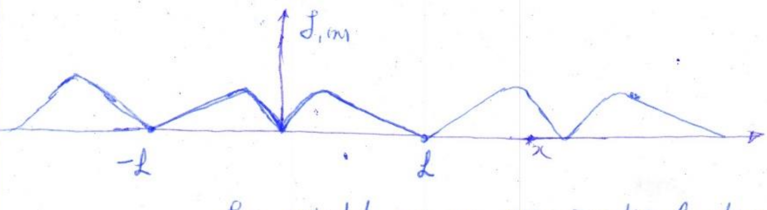
$f_1 = x \;,\; f_2 = \pi$

Half Range Expansions

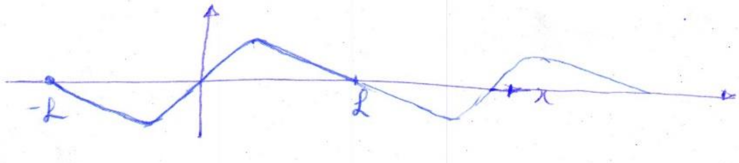
گسترش نیم دامنه یک تابع

گاهی با توابعی سروکار داریم که در یک فاصله خاصی مثل $[0, l]$ تعریف می‌شوند.



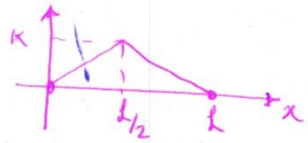


f(x) extended as an even Periodic function.



از نظر فیزیکی فقط در محدوده $0-l$ مفهوم دارد.

Example: $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$



Even periodic extension,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\,dx\right] = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]$$

$$= \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right), \quad a_n = 0 \text{ if } n \neq 2, 6, 10, 14 \dots$$

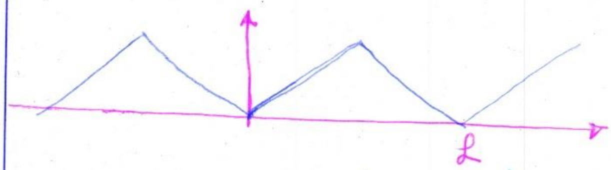
$$\rightarrow a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = \frac{-16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = \frac{-16k}{10^2\pi^2}, \quad \vdots$$

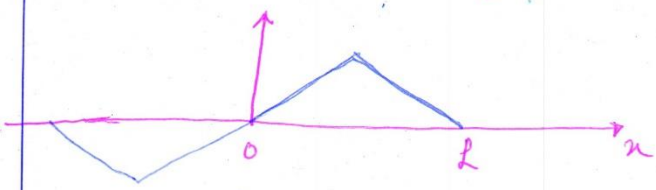
$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L} + \dots\right)$$

Odd Periodic extension:

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

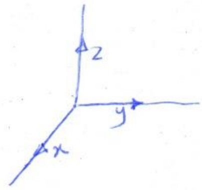
$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right)$$





مبنای متعامد:

یادآوری از بردارها:



$$\vec{R} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$\hat{x} \cdot \vec{R} = \alpha + 0 + 0$$
$$\hat{y} \cdot \vec{R} = \beta + 0 + 0 \longrightarrow \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\} \longrightarrow \text{مبنای متعامد}$$
$$z \cdot \vec{R} = \gamma + 0 + 0$$

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم به طوری که در بازه (a,b) به طور قطعه‌ای پیوسته باشند، $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ باشد

اصطلاحاً گویند f و g دو تابع متعامدند در بازه (a,b)

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \longrightarrow \begin{cases} \langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle \\ \langle f,g+h \rangle = \langle f,g \rangle + \langle f,h \rangle \\ \langle cf,g \rangle = c\langle f,g \rangle \end{cases}$$

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$$

این مجموعه توابع مبنای متعامد تشکیل می‌دهند یعنی این توابع دوبه‌دو برهم عمودند.

اگر مبنای زیر را در نظر بگیریم و داشته باشیم $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases} \longrightarrow \text{Orthogonal} \quad \text{مبنای متعامد}$$

$$\text{if} \quad \int_a^b f_i(x) f_j(x) \lambda(x)\, dx = 0 \quad (i \neq j)$$

گوییم f_i و f_j متعامدند با تابع وزنی λ.

تابع بسل با تابع وزنی $\lambda(x) = x$ متعامدند

$$\langle f_i, f_i \rangle = \|f\|^2 = \int_a^b |f_i|^2 dt$$

$$\|f\| = \text{Norm of } f = \langle f_i, f_i \rangle^{1/2} \geq 0$$

$$\text{if} \quad \phi_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}, \quad \{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

متعامد یکه شده Ortho Normal

اگر تابعی مانند $f(x)$ را برحسب یک مبنای متعامد $\{\phi_i\}$ بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$$

با ضرب داخلی در ϕ_n

$$\langle f, \phi_n \rangle = a_n \langle \phi_n, \phi_n \rangle \rightarrow a_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

* برای اینکه بتوان $f(x)$ را برحسب یک مبنای متعامد بسط داد و $f(x)$ دلخواه را ... باید دو شرط برقرار باشد

۱- مبنای انتخاب شده کامل باشد Completeness

۲- سری نوشته شده همگرا باشد Convergence.

مبنا را کامل گوییم، هرگاه هیچ بردار دیگری غیر صفر نتوان پیدا کرد که بر عوامل مبنا عمود باشد.

تعریف
تعامد توابع مختلط: اگر توابع مختلط $f_n(t)$ و $f_m(t)$ داشته باشیم که از مجموعه $\left\{f_n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$

$$\langle f_m, f_n\rangle = \int_a^b f_m(t) \cdot f_n^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

$f_n^*(t)$: مزدوج تابع $f_n(t)$ است.

Hermitian innerproduct.

$$\langle f_m, f_m\rangle = \int_a^b |f_m|^2\, dt = \|f_m\|^2 = \int_a^b f_m(t) f_m^*(t)\, dt$$

Complex Fourier Series:

We show that the Fourier series

$$f(x) = a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Can be written in Complex form,

Euler formula:

$$\left.\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \\ \sin t &= \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \end{aligned}$$

Hint: $\frac{1}{i} = -i \quad , \quad t = nx$

$$\rightarrow a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - i b_n)}_{C_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + i b_n)}_{K_n} e^{-inx}$$

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{inx} + K_n e^{-inx}\right) \qquad (\text{II})$$

$$A=\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}\ ,\ P=2\pi \rightarrow$$

$$e^{imx},e^{inx}\xrightarrow[\text{متعامدند}]{\text{شرط}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)x}\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 2\pi & n=m\end{cases}$$

که سنبه متعامد است لذا اگر طرفین رابطه (II) را در e^{-imx} ضرب کرده و در $[-\pi,\pi]$ انتگرال گیری کنیم

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-imx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}C_0\,e^{-imx}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}k_n e^{-inx}\cdot e^{-imx}\,dx$$

$$=0\quad+\quad C_m(2\pi)\quad+\quad 0$$

$$C_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-imx}\,dx$$

حال اگر طرفین (II) را در e^{+imx} ضرب کرده و از $[-\pi,\pi]$ انتگرال گیری کنیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{imx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}C_0\,e^{imx}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{imx}\cdot e^{inx}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}k_n e^{-inx}e^{imx}\,dx$$

$$=0\quad+\quad 0\quad+\quad k_m(2\pi)$$

$$k_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{imx}$$

$$k_m=C_{-m}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad , \quad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$x = \frac{2\pi t}{T} : \quad x=-\pi ,\ t=\frac{-T}{2} \qquad x=\pi ,\ t=\frac{T}{2}$$

اگر دوره تناوب T باشد

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\, dx$$

if $T = 2l$ $\rightarrow$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\, dx$$

Example: $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$

and. $\{ f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+inx}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in} e^{x-inx}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(-1)^n$$

Hinte: $e^{\mp in\pi} = \cos n\pi \pm i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{1+n^2} \quad , \quad e^{\pi} - e^{-\pi} = 2\sinh\pi$$

$$\rightarrow \quad e^{x} = \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \qquad -\pi < x < \pi$$

Drive the real Fourier series:

$$(1+in)e^{inx} = (1+in)(\cos nx + i\sin nx) = (\cos nx - n\sin nx) + i(n\cos nx + \sin nx)$$

$$n = -n \rightarrow (1-in)e^{-inx} = (1-in)(\cos(-nx) - i\sin nx) = (\cos nx - n\sin nx) - i(n\cos nx + \sin nx)$$

$\rightarrow$ for $n \neq 0$ $\qquad 2(\cos nx - n\sin nx)$

for $n = 0$ $\qquad 1$

$$\rightarrow \quad e^{x} = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2}(\cos 2x - 2\sin 2x) - + \cdots\right]$$

تساوی پارسوال برای سری فوریه مختلط :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$$

طرفین را در $f^*(t)$ ضرب کنیم

$$f(t)\cdot f^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t} c_m^* e^{-i\frac{2\pi m}{T}t}$$

$$= \sum_m \sum_n c_n c_m^* e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t}$$

$$|f(t)|^2 = \sum_m \sum_n c_n c_m^* e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = |C_n|^2 * T = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad , \quad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-in} x e^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx} \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{n^2} (inx + 1)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-in\pi}}{n^2} (in\pi + 1) - \frac{e^{in\pi}}{n^2}(-in\pi + 1)$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}\left[2\left[n\cos(n\pi)\pi - \sin(n\pi) \right] i \right]$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi n^2}\left[2\left[-n\cos(n\pi)\pi + \sin(n\pi) \right] i \right]$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{0} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\rightarrow f(x) = x = 0 - i e^{ix} + i e^{-ix} + \frac{i}{2} e^{2ix} - \frac{i}{2} e^{-2ix} - \frac{i}{3} e^{3ix} + \dots$$

$$x = 2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \dots$$

[illegible] : $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \quad , \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$

ضرایب بسط فوریه ، $a_n = c_n + C_{-n} \quad , \quad b_n = i(C_n - C_{-n})$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

مقدار متوسط توان سیگنال در یک دوره تناوب

مجموع توان مولفه‌های هارمونیک

همگرایی سری فوریه سیگنال‌های متناوب:

- سیگنال‌هایی که به صورت مجذوری انتگرال‌پذیر هستند در یک دوره تناوب، دارای سری فوریه‌ای همگرا است $\int_T |f(t)|^2 \, dt < \infty$

- دسته دیگر از توابع که سری فوریه آنها همگراست توابعی هستند که در شرایط دیریکله صدق می‌کنند.

شرایط دیریکله:

۱- تابع در یک دوره تناوب بطور مطلق انتگرال‌پذیر باشد

$$\int_T |f(t)| \, dt < \infty$$

۲- تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع در یک دوره تناوب محدود باشد.

۳- تعداد نقاط ناپیوستگی یک تابع در یک دوره تناوب محدود باشد.

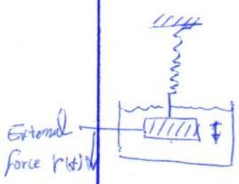
• انتگرال‌گیری جمله به جمله در مورد توابعی که در شرایط دیریکله صدق می‌کنند اشکالی ندارد و سری به‌دست آمده سری فوریه تابع به‌دست آمده است

• اگر $f(t)$ و $f'(t)$ در شرایط دیریکله صدق می‌کنند، می‌توان جمله به جمله از سری فوریه مشتق گرفت.

Forced oscillations:

نوسانات واداشته

Fourier series have important applications in connection with ODEs and PDEs.

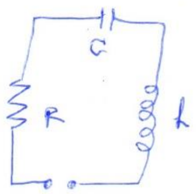


$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = r(t)$$

$y = y(t)$ = is the displacement from rest.

c: damping constant

k = spring constant.



$$LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = e(t)$$

حل معادله:

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{عمومی}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{خصوصی}}$$

$$y_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

λ_1 و λ_2 منفی‌اند یا جزء حقیقی آنها منفی است، زیرا ضرایب معادله مشخصه مثبت‌اند.

- قسمت همگن تابع یا پاسخ عمومی با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کند (گذرا) "transient"

- قسمت خصوصی $y_p(t)$ بستگی به ماهیت ورودی دارد.

- اگر ورودی ثابت باشد ($r(t)$) آنگاه پاسخ نیز ثابت است

اگر ورودی سینوسی با فرکانس ω باشد آنگاه پاسخ خصوصی $y_p(t)$ نیز سینوسی با فرکانس ω خواهد بود.

اگر فرکانس متناوب با نقطه تناوب $\frac{1}{\omega}$ = آ باشد، و پاسخ حالت پایدار نیز متناوب [illegible] معادله شکل
نشان داده شد که هارمونیک‌ها در آن‌ها باشد (این درصد سیستم غیرخطی [illegible] غیرثابت) [illegible]

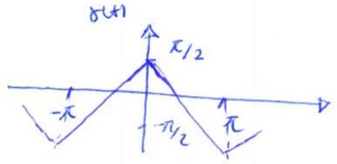
۹.

Example

$$m = 4\,gr,\quad c = 0.05\ g/s,\quad K = 25\ g/s^2$$

$$y'' + 0.05y' + 25y = r(t)$$

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(2\pi + t) = r(t)$$



$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \dots\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\cos nt \qquad n = 1, 3, \dots$$

$$\rightarrow y'' + 0.05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad n = 1, 3, \dots$$

$$y_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D_n},\quad B_n = \frac{0.2}{n\pi D_n},\quad D_n = (25 - n^2)^2 + (0.05n)^2$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \qquad n \text{ فرد}$$

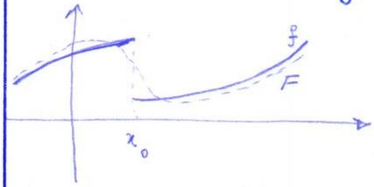
تقریب‌هایی برای تابع f(x) (Approximation by Trigonometric Polynomials)

ـ کاربرد دیگر سری فوریه در تئوری تقریب است "approximation theory"

تابع f(x) را متناوب با دوره تناوب 2π فرض می‌کنیم در این صورت سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nth Partial Sum of the Series: $f(x) \approx a_0 + \sum_{1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$



تقریبی از تابع f(x) است.

آیا این بهترین تقریب است؟

فرض می‌شود که تابع

$$F(x) \approx f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

ثابت می‌شود که بهترین تقریب از f(x) با ضرایب فوریه است.

کدام بهتر است. هر کدام که خطای کمتری داشته باشد.

از "Mean square error" استفاده می‌کنیم که هر کدام از این دو منحنی کمتر باشند بهتر هستند.

$$E = \int_a^b (f - F)^2 dx$$

$-\pi \leq x \leq \pi$

$$= \int_a^b f^2 dx - 2\int_a^b fF dx + \int_a^b F^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx$$

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\cancel{\pi}\left[2a_0\alpha_0 + \sum_{1}^{N}(\alpha_n a_n + b_n \beta_n)\right] + \pi\left[2\alpha_0^2 + \sum_{1}^{N}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right]$$

حال اگر ضرایب فوریه را انتخاب کنیم

$$E^{A} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi\left[2a_0^2 + \sum_{1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right] + \pi\left[2a_0^2 + \sum_{1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

$$E-\hat{E} = \pi\left[2(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{1}^{N}(a_n-\alpha_n)^2+\sum_{1}^{N}(b_n-\beta_n)^2\right] \geqslant 0$$

$$E-\hat{E} \geqslant 0 \rightarrow \hat{E} \leqslant E$$

بنابراین تقریب مثلثاتی با ضرایب فوریه خطای کمتری دارد و بهتر است.

theorem 1:

the square error of F (with fixed N) relative to f on the interval $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ is minimum if and only if the coefficients of F in (2) are the Fourier coefficients of f. this minimum value of $\hat{E}$ is, $\hat{E} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \pi\left[2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right]$

چون $\hat{E}$ با افزایش N افزایش نمی‌یابد بلکه ممکن است کاهش یابد، بنابراین با افزایش N، تقریب بهتر و بهتر می‌شود.

$$\hat{E} = \int_a^b (f-F)^2\,dx \longrightarrow \hat{E} \geqslant 0$$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \pi\left[2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right] \geqslant 0$$

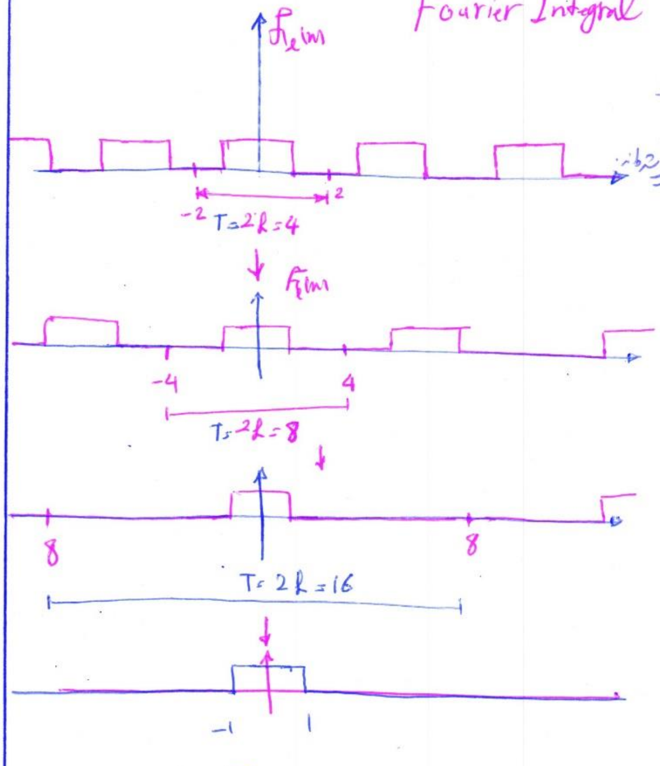
$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx$$

Bessel's inequality

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx$$

انتگرال فوریه: "Fourier Integral"

* سری فوریه یک ابزار قدرتمند است فقط برای سیگنالهایی که شامل تناوب هستند که متناوب نباشند باید در یک ناحیه محدود تعریف شوند.



$2l = T \to \infty$

اگر $T\to\infty$ برسد که تابع غیر متناوب داریم.

حال یک سیگنال موج متناوب مانند $f_T(t)$ در نظر بگیریم آن را بسط فوریه دهیم و سپس $T\to\infty$ میل دهیم.

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\cdot\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt\right.$$

$$\left. + \sin\frac{2\pi n}{T}t\cdot\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,dt\right]$$

$$\frac{2\pi n}{T} = \omega_n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T}\left[\cos\omega_n t\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos\omega_n t\,dt + \sin\omega_n t\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin\omega_n t\,dt\right]$$

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega_n = \frac{2\pi}{T}(n+1) - \frac{2\pi}{T}(n) = \frac{2\pi}{T} =$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} \longrightarrow \frac{2}{T} = \frac{\Delta\omega_n}{\pi}$$

$$T \longrightarrow \infty$$

$$\frac{1}{T} \longrightarrow 0$$

وقتی $T \to \infty$ با فرض آنکه $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ موجود باشد، در اینصورت

$f(t) = 0 +$ بقیه جملات $,\ \omega_n = \omega$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Delta\omega_n}{\pi}\left\{\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt + \sin\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right\}\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = A(\omega)$$ تابعی از ω خواهد بود

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = B(\omega)$$ تابعی از ω خواهد بود.

تبدیل

$$f(t) = 0 + \int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t \right) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \quad , \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

∴ تابعی که سری فوریه آن موجود و مشروط $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = k$ همگرا باشد، اطلاق انتگرال فوریه

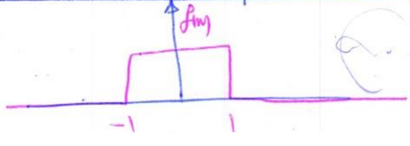
• قضیه:

اگر $f(t)$ بطور تکه‌ای پیوسته باشد و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد و عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ موجود باشد در اینصورت می‌توان آنرا به شکل یک انتگرال فوریه نوشت که مقدار انتگرال در همه جا برابر است با $f(t)$ بجز در نقاط ناپیوسته t_0 که در این نقطه حاصل انتگرال برابر است با میانگین تابع در t_0^- و t_0^+ یعنی

$$\frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$$

Example: Find the Fourier integral representation of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x|<1 \\ 0 & \text{if } |x|>1 \end{cases}$$



$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$f(t) = \int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega t\Big|_{0}^{1} = \boxed{\frac{2\sin\omega}{\omega\pi}}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\omega t\,dt = 0$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega$$

$$t=0 \rightarrow f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos 0\,d\omega \Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$t=1 \rightarrow f(1) = \frac{1+0}{2} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\omega}{\omega}\,d\omega$$

$$\rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$S_i(x) = \int_{0}^{x}\frac{\sin u}{u}\,du = \text{Sine Integral}$$

$$S_i(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

سرتیپ ۸۰۱۰ ، مدرس ریاضی فیزیک جبرائی

عنوان　　　تاریخ　　　مرجع　　　صفحه ۴۳

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\, e^{i2\pi f t}\, dt$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$

تبدیل فوریه تابع $f(t)$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(f) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad , \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

تبدیل فوریه $f(t)$

ثابت کنید که انتگرال فوریه را می‌توان به فرم

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega$$

را می‌توان به فرم

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(x-u)\, du\, d\omega$$

و از این طریق می‌توان آن را به فرم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\omega(u-x)}\, du\, d\alpha$$

و از آن طریق تبدیل فوریه را بدست آورید.

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega u\, du \quad , \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega u\, du$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\omega u\cos\omega x + \sin\omega u\sin\omega x\right] f(u)\, du\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\omega x - \omega u)\, du\right\}}_{\text{یک تابع زوج برحسب } \omega \text{ می‌باشد}} d\omega$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(x-u)\, du\right\} d\omega$$

از طرفی داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\omega x-\omega u)\,du\right]d\omega = 0$$

چون تابع $\sin\omega(x-u)$ یک تابع فرد برحسب ω است بنابراین

$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(x-u)\,du = G(\omega)$ نیز یک تابع فرد برحسب ω خواهد بود لذا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,d\omega = 0$$

حال از فرمول معروف اویلر

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{i(\omega x-\omega u)} = \cos(\omega x-\omega u) + i\sin(\omega x-\omega u)$$

$$f(u)\,e^{i(\omega x-\omega u)} = f(u)\cos(\omega x-\omega u) + i f(u)\sin(\omega x-\omega u)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(x-u)\,du\right\} + i\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(x-u)\,du\right\}\right]d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{i\omega(x-u)}\,du\,d\omega \qquad i=\sqrt{-1}$$

Fourier Transfer:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du\right] e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \mathcal{F}(f)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$$

Example: $f(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\times -i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

$$\therefore\ \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = \sin\omega \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\sqrt{2\pi}\,\omega}$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin\omega}{\omega}$$

$\mathcal{F}(e^{-ax})$ if $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x>0 \quad a>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(e^{-ax}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a+i\omega)}$$

$$\mathcal{F}(af+bg) = a\mathcal{F}(f) + b\,\mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega\,\mathcal{F}(f(x)) = i\omega\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2\mathcal{F}(f(x)) = -\omega^2\hat{f}(\omega)$$

let $f(x)$ be Continuous on the x-axis and $f(x)\to 0$ as $|x|\to\infty$

furthermore, let $f'(x)$ be absolutely on the x-axis,

then.

Example: Find Fourier transform of xe^{-x^2}

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = \mathcal{F}\left\{-\tfrac{1}{2}(e^{-x^2})'\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{(e^{-x^2})'\}$$

$$= -\frac{1}{2}i\omega\,\mathcal{F}(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}i\omega\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}$$

$$= \boxed{-\frac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}}$$

Convolution: $h(x)$

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp$$

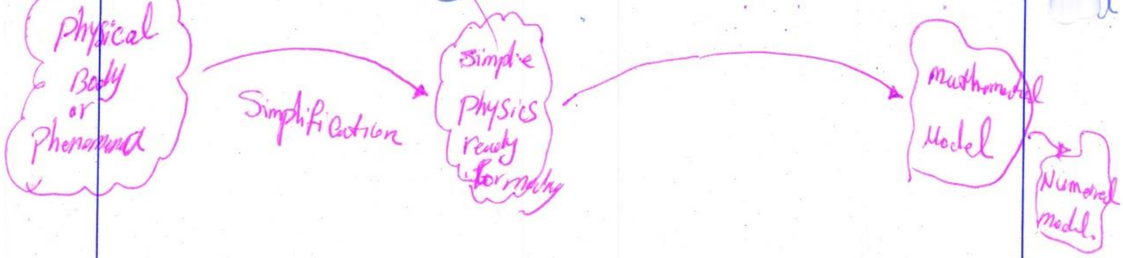
$$\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

عکس

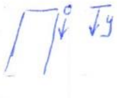
Differential Equations. are of basic importance in engineering mathematics because many physical laws and relations appear mathematically in the form of a differential equation.

Physical Modeling ⟶ Mathematical model ⟶ Numerical model



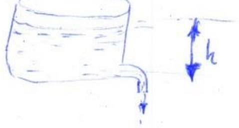
if we want to solve an engineering problem (usually of a physical nature):

- We have to formulate the problem as a mathematical expression in terms of variables, functions, equations...
- $y'' = g = Const$ برای سقوط آزاد یک جسم از بلندی

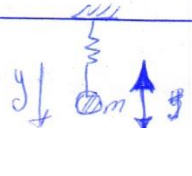


$mv' = mg - bv^2$ v = velocity سقوط یک چتر باز در هوا

$h' = -k\sqrt{h}$ خروج یک سیال از تانک

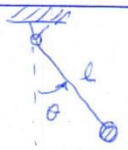


$my'' + ky = 0$ نوسان جرم و فنر



نوسان پاندول

$$l\theta'' + g\sin\theta = 0$$



تغییر شکل یک تیر:

$$EI\,y^{(4)} = f(x)$$

What are PDEs?

PDEs are models of various physical and geometrical problems, arising when the unknown functions depend on two or more variables.

A Partial Differential Equation "PDE" is an equation involving one or more partial derivatives of an unknown function.

The order of highest derivatives is called the order of PDE.

اغلب ریاضیات فیزیک به فرم PDE هستند هرچند که ما با ساده‌سازی
به مسائل به صورت معادلات ODE ها می‌رسیم.

Some well-known PDEs:

$u_t = u_{xx}$	heat equation in one dimension
$u_t = u_{xx} + u_{yy}$	heat equation in two Dimension
$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$	Laplace's equation in Polar Coordinate
$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$	Wave equation in three dimension

2. Number of variables:

is number of independent variables,

$u_t = u_{xx}$ (two variables, x, t)

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$ (three variables, r, θ, t)

3. linearity;

PDEs = I. linear → dependent variable u, and all its derivatives appear in a linear fashion (For example: they are not multiplied together or squared, ...)

PDEs = II. nonlinear →

A second order linear equation with two variables is an equation of the form:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G \quad (1)$$

A, B, C, D, E, F, G can be constants or given functions of x and y;

$u_{tt} = e^{-t} u_{xx} + \sin t$ → linear

$u u_{xx} + u_t = 0$ → nonlinear

$u_{xx} + y u_{yy} = 0$ → linear

$x u_x + y u_y + u^2 = 0$ → nonlinear.

4. Homogeneity,

In eq (I) if $G(x,y) = 0$ for all $x, y \rightarrow$ Homogeneous

if " " $G(x,y) \neq 0$ " some " $\rightarrow$ nonhomogeneous.

5. Kinds of Coefficients:

if A, B, C, D, E, F in eq (I) are Constants, then eq (I) is said to have Constant ~~Coefficients~~ Coefficients (otherwise, variable Coefficients)

6. Three Basic types of linear equations:

All PDE's like equation (I) are either:

a) Parabolic سهموی $\rightarrow B^2-4AC = 0 \rightarrow$ describe heat flow and diffusion process

b) Hyperbolic هذلولی $\rightarrow B^2-4AC > 0 \rightarrow$ describe vibrating system and wave motion

c) Elliptic بیضوی $\rightarrow B^2-4AC < 0 \rightarrow$ steady state phenomena

Example:

$u_t = u_{xx} \longrightarrow u_{xx} - u_t = 0, \; A = 1, \; B = 0, \; C = 0, \; B^2-4AC = 0,$

this equation is Parabolic.

$u_{tt} = u_{xx} \longrightarrow u_{xx} - u_{tt} = 0, \; A = 1, \; B = 0, \; C = -1, \; B^2-4AC = 4 > 0$ hyperbolic

$u_{\xi\eta} = 0 \longrightarrow A = C = 0, \; B = 1, \; B^2-4AC = 1 > 0$ hyperbolic.

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \longrightarrow A = C = 1, \; B = 0, \; B^2-4AC = -4 < 0$ Elliptic

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

u : is unknown function (dependent variable) always depends on more than one variable.

Why Are PDEs Usefule?

Most of the Natural laws of Physics, such as:

- Maxwell's equations
- Neuton's law of cooling
- Navier-Stockes equation
- Neuton's equation of motion

⋮

are stated interms of PDEs.

این قوانین معمولاً پدیده‌های فیزیکی را با ارتباط زمان و مکان تشریح می‌کنند.

مشتقات در این قوانین ظاهر می‌شوند زیرا آنها چیزهای طبیعی مثل سرعت، شتاب، فلاکس، نیرو، تنش، ... را می‌سنجند.

We dissussed here:

How to formulate the PDE from the Physical Problem?

How to Solve the PDE (along with initial & Boundary Conditions)

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0 \xrightarrow[C=1]{A=y,\ B=0} B^2 - 4AC = -4y \quad \begin{cases} y > 0 & \text{Elliptic} \\ y = 0 & \text{Parabolic} \\ y < 0 & \text{hyperbolic} \end{cases}$$

• چون B^2-4AC تابعی از متغیرهای مستقل می‌باشد بنابراین شکل معادله ممکن است از یک Basic به Basic دیگر تغییر فرم دهد.

Fundamental theorem on superposition.

if u_1 & u_2 are solutions of a homogeneous linear PDE in some region R, then

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

With any constants c_1 & c_2 is also a solution of that PDE in the region R.

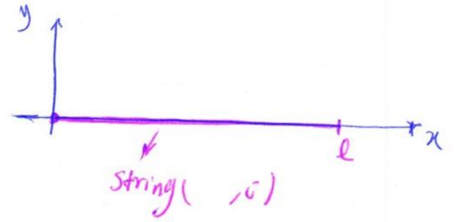
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{\mathcal{L}\ \text{operator or عملگر}} u = 0$$

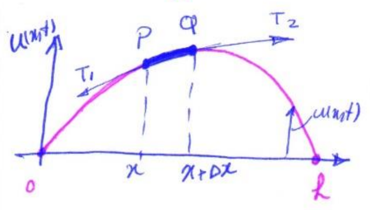
$$\mathcal{L}(u_1+u_2) = \mathcal{L}u_1 + \mathcal{L}u_2 \longleftrightarrow \text{عملگر خطی باشد}$$

Wave equation in one-dimensional

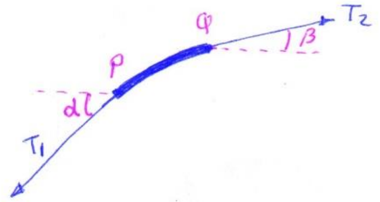
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

معادله موج - هم به زمان بستگی دارد، هم به مکان $u = u(x,t)$





تاری به طول l را بین دو نقطه فیکس می‌کنیم، آنگاه تار را کشیده و در لحظه $t=0$ آن را آزاد می‌کنیم تا شروع به ارتعاش کند، حال می‌خواهیم معادله حاکم بر ارتعاش را بیابیم:



physical assumptions:

- homogeneous string (the mass of the string per unit length is constant)
- the string is perfectly elastic
- the tension caused by stretching the string befor fastening it at the ends, is so large the gravational force can be neglected
- the string performs small transverge motions in a vertical plane

Since the points of the string move vertically, there is no motion in the horizontal direction.

$$\rightarrow \sum_x F = 0 \rightarrow T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0 , \quad T_2\cos\beta = T_1\cos\alpha = Const = T$$

$$\stackrel{+}{\uparrow} \sum dF_y = dm\, a_y$$

$$-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = \rho \Delta x\, a_y = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طرفین رابطه را به $Const = T_2\cos\beta = T_1\cos\alpha = T$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\tan\beta =$ شیب تار در نقطه $x+\Delta x$ $= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$, $\tan\alpha =$ شیب تار در x $= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}$

چون u هم تابع x، هم تابع t است بنابراین مشتقات جزئی استفاده شود.

$$\rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right) = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Solution by Separating Variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (I)$$

Since the string is fastened at ends $x=0$, $x=l$ we have two B.C.

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(l,t)=0 \qquad \text{for all } t \qquad (II)$$

Futhermore, the form of the motion of the string will depend on its intial deflection, and its initial velocity, we have two Initial Condition

$$u(x,0)=f(x) \quad \text{وضعیت اولیه} \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_t(x,0) = g(x) \quad . \quad 0 \leq x \leq l \qquad (III)$$

حال می‌توان معادله (I) را با شرایط مرزی (II) و شرایط اولیه III حل کرد.

In Separating variable or Product Method,

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

فرض می‌کنیم که پاسخ معادله I به فرم زیر باشد:

F(x) فقط تابع از x و G(t) فقط تابع از (t) است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

$$\rightarrow \quad F\ddot{G} = c^2 F'' G$$

چون $u=FG$ نباید صفر باشد پس طرفین معادله را بر FG تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = \begin{cases} k^2 \\ 0 \\ -k^2 \end{cases}$$

چون طرف اول فقط تابع از t و طرف دوم فقط تابع از x لذا باید مساوی ثابت باشد.

if we select K^2 $\rightarrow \frac{F''}{F} = K^2 \rightarrow F'' - K^2 F = 0$

$\rightarrow F = Ae^{Kx} + Be^{-Kx}$ or $A\cosh Kx + B\sinh Kx$

$u = FG$ must satisfies the B.C.:

$u(0,t) = 0 = F(x)G(t) = G(t)F(0) = 0 \xrightarrow{G(t) \neq 0} F(0) = 0$

$u(l,t) = 0 = F(l)G(t) = G(t)F(l) = 0 \xrightarrow{G(t) \neq 0} F(l) = 0$

$\rightarrow F(0) = A + B = 0$

$F(l) = Ae^{Kl} + Be^{-Kl} = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{Kl} & e^{-Kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{Kl} & e^{-Kl} \end{vmatrix} = e^{-Kl} - e^{Kl} \neq 0$$

بنابراین: $A = B = 0$ می‌شود ← پس $+K^2$ انتخاب مناسبی نیست:

نکته: برای اینکه این مجموعه معادلات جواب غیرصفر داشته باشد باید $\det(\text{ضرایب}) = 0$ شود.

if we select $0 \rightarrow \frac{F''}{F} = 0 \rightarrow F'' = 0$, $F = A'x + B'$

$F(0) = A'(0) + B' = 0 \rightarrow B' = 0$

$F(l) = A'(l) + B' = 0 \longrightarrow A' = 0$

در $k = 0$ هم به جواب منجر نمی‌شود (غیرصفر)

if we select $-K^2$:

$\frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{G} = -K^2$

$$F'' + k^2 F = 0, \qquad F(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

B.C.

$$F(0) = 0 = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \rightarrow \boxed{A=0}$$

$$F(l) = 0 = \cancel{A}\cos kl + B\sin kl = 0 \rightarrow B\sin kl = 0$$

We must take $B \neq 0$, since otherwise $F=0$

Hence, $\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \quad , n = 1, 2, 3 \dots$$

For $G(t)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = -k^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{\ddot{G}}{G} = -\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 \Rightarrow \ddot{G} + \Big(\underbrace{\frac{n\pi c}{l}}_{\lambda_n}\Big)^2 G = 0$$

$$G_n(t) = C_n\cos\lambda_n t + D_n\sin\lambda_n t$$

$$U_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left[C_n'\cos\lambda_n t + D_n'\sin\lambda_n t\right]$$

جواب کلی ترکیب خطی U_n ها است

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left[C_n'\cos\lambda_n t + D_n'\sin\lambda_n t\right]$$

C_n' و D_n' را طوری تعیین می‌کنیم که $U(x,t)$ در شرایط اولیه صدق کند.

$u_n(x,t)$ ها توابع ویژه یا characteristic functions یا eigenfunctions

گویند. $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ را مقادیر ویژه یا characteristic value یا eigenvalues

می‌گویند و مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ را طیف یا Spectrum گویند.

Each u_n represents a harmonic motion having the Frequency $\lambda_n/2\pi = \frac{cn}{2l}$ cycle per unit time

this motion is called the nth normal mode of string

The first normal mode is known as the fundamental mode $(n=1)$ and the others known as overtones;

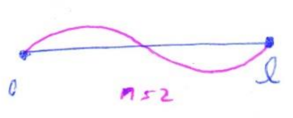
$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \rightarrow x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} l$

که همان نقاط گره‌ای n-1 گره است. گره‌ها نقاطی هستند که حرکت ندارند

حرکت زمانی هر مد:

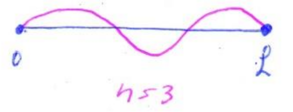
$n=1$

$u_1(x,t) = (\ ) \sin \frac{\pi x}{l}$



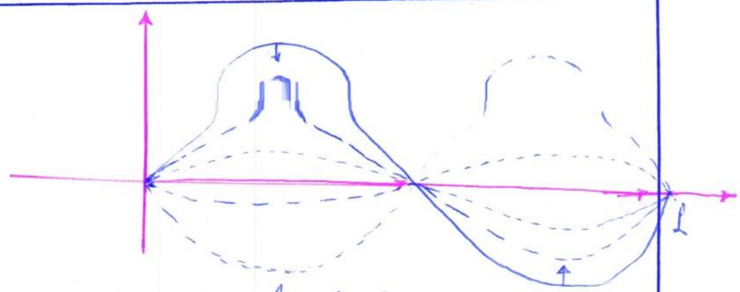
$n=2$

$u_2(x,t) = (\ ) \sin \frac{2\pi x}{l}$



$n=3$

$u_3(x,t) = (\ ) \sin \frac{3\pi x}{l}$



Second normal mode for various values of t

Satisfying Initial Conditions:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \sin\frac{n\pi x}{l}$$

اگر گسترش فرد از تابع f(x) را در نظر بگیریم در اینصورت پاسخ مسئله دوره تناوب 2l خواهد بود

$$C_n' = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

Satisfying the

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) =$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left[-C_n'\lambda_n \sin\lambda_n t + D_n'\lambda_n \cos\lambda_n t\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n'\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\rightarrow D_n'\lambda_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

اگر g(x) را گسترش فرد دهیم

$$D_n' = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

$u_t = u_x$ (first order)

$u_t = uu_{xxx} + \sin x$ (third order)

2. *Number of Variables.* The number of variables is the *number of independent* variables, for example,

$$u_t = u_{xx} \quad \text{(two variables: } x \text{ and } t)$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad \text{(three variables: } r, \theta, \text{ and } t)$$

3. *Linearity.* Partial differential equations are either *linear* or *nonlinear*. In the linear ones, the dependent variable u and all its derivatives appear in a linear fashion (they are not multiplied together or squared, for example). More precisely, a **second-order linear equation in two variables** is an equation of the form

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{1.1}$$

where A, B, C, D, E, F, and G can be *constants* or given *functions* of x and y; for example,

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad \text{(linear)}$$
$$uu_{xx} + u_t = 0 \quad \text{(nonlinear)}$$
$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad \text{(linear)}$$
$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad \text{(nonlinear)}$$

4. *Homogeneity.* The equation (1.1) is called **homogeneous** if the right-hand side $G(x,y)$ is identically zero for all x and y. If $G(x,y)$ is not identically zero, then the equation is called **nonhomogeneous**.
5. *Kinds of Coefficients.* If the coefficients $A, B, C, D, E,$ and F in equation (1.1) are constants, then (1.1) is said to have **constant coefficients** (otherwise, variable coefficients).
6. *Three Basic Types of Linear Equations.* All linear PDEs like equation (1.1) are either
   (a) parabolic
   (b) hyperbolic
   (c) elliptic

Parabolic. **Parabolic equations** describe heat flow and diffusion processes and satisfy the property $B^2 - 4AC = 0$.

Hyperbolic. **Hyperbolic equations** describe vibrating systems and wave motion and satisfy the property $B^2 - 4AC > 0$.

Elliptic. **Elliptic equations** describe *steady-state* phenomena and satisfy the property $B^2 - 4AC < 0$.

Examples:

(a) $u_t = u_{xx}$ $\quad B^2 - 4AC = 0$ (parabolic)

(b) $u_{tt} = u_{xx}$ $\quad B^2 - 4AC = 4$ (hyperbolic)

(c) $u_{\xi\eta} = 0$ $\quad B^2 - 4AC = 1$ (hyperbolic)

(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $\quad B^2 - 4AC = -4$ (elliptic)

(e) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ $\quad B^2 - 4AC = -4y$ $\quad \begin{cases} \text{elliptic for } y > 0 \\ \text{parabolic for } y = 0 \\ \text{hyperbolic for } y < 0 \end{cases}$

(In the case of variable coefficients, the situation can change from point to point.)

NOTES

1. In general, $B^2 - 4AC$ is a *function* of the independent variables; hence, an equation can change from one basic type to another throughout the domain of the equation (although it's not common).
2. The general linear equation (1.1) was written with independent variables x and y. In many problems, one of the two variables stands for time and hence would be written in terms of x and t.
3. A *general classification* diagram is given in Figure 1.1.

Linearity	Linear				Nonlinear		
Order	1	2	3	4	5	. . .	m
Kinds of coefficients (linear equations)	Constant				Variable		
Homogeneity (linear equations)	Homogeneous				Nonhomogeneous		
Number of variables	1	2	3	4	5	. . .	n
Basic type (linear equations)	Hyperbolic		Parabolic		Elliptic		

FIGURE 1.1 Classification diagram for partial differential equations.

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \qquad \text{(wave equation in three dimensions)}$$
$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u \qquad \text{(telegraph equation)}$$

Note on the Examples

The unknown function u always depends on *more* than one variable. The variable u (which we differentiate) is called the **dependent** variable, whereas the ones we differentiate *with respect to* are called the **independent** variables. For example, it is clear from the equation

$$u_t = u_{xx}$$

that the dependent variable $u(x,t)$ is a function of two independent variables x and t, whereas in the equation

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

$u(r,\theta,t)$ depends on r, θ, and t.

Why Are PDEs Useful?

Most of the **natural laws of physics,** such as Maxwell's equations, Newton's law of cooling, the Navier-Stokes equations, Newton's equations of motion, and Schrodinger's equation of quantum mechanics, are stated (or can be) in terms of PDEs, that is, these laws describe physical phenomena by **relating space and time derivatives.** Derivatives occur in these equations because the derivatives represent *natural things* (like velocity, acceleration, force, friction, flux, current). Hence, we have equations relating partial derivatives of some unknown quantity that we would like to find.

The purpose of this book is to show the reader two things

1. How to *formulate* the PDE from the physical problem (constructing the mathematical model).
2. How to *solve* the PDE (along with initial and boundary conditions).

We wait a few lessons before we start the modeling problem; now, a brief overview on how PDEs are solved.

How Do You Solve a Partial Differential Equation?

This is a good question. It turns out that there is an entire arsenal of methods available to the practitioner; the most important methods are those that change PDEs into ODEs. Ten useful techniques are

1. *Separation of Variables.* This technique reduces a PDE in n variables to n ODEs.
2. *Integral Transforms.* This procedure reduces a PDE in n independent variables to one in $n-1$ variables; hence, a PDE in two variables could be changed to an ODE.
3. *Change of Coordinates.* This method changes the original PDE to an ODE or else another PDE (an easier one) by changing the coordinates of the problem (rotating the axis and things like that).
4. *Transformation of the Dependent Variable.* This method transforms the unknown of a PDE into a new unknown that is easier to find.
5. *Numerical Methods.* These methods change a PDE to a system of *difference equations* that can be solved by means of iterative techniques on a computer; in many cases, this is the only technique that will work. In addition to methods that replace PDEs by difference equations, there are other methods that attempt to approximate solutions by polynomial surfaces (spline approximations).
6. *Pertubation Methods.* This method changes a nonlinear problem into a sequence of *linear ones* that approximates the nonlinear one.
7. *Impulse-response Technique.* This procedure decomposes initial and boundary conditions of the problem into *simple impulses* and finds the response to each impulse. The overall response is then found by adding these simple responses.
8. *Integral Equations.* This technique changes a PDE to an **integral equation** (an equation where the unknown is inside the integral). The integral equation is then solved by various techniques.
9. *Calculus of Variations Methods.* These methods find the solution to PDEs by reformulating the equation as a *minimization problem*. It turns out that the minimum of a certain expression (very likely the expression will stand for total energy) is also the solution to the PDE.
10. *Eigenfunction Expansion.* This method attempts to find the solution of a PDE as an infinite sum of *eigenfunctions*. These eigenfunctions are found by solving what is known as an eigenvalue problem corresponding to the original problem.

Kinds of PDEs

Partial differential equations are classified according to many things. Classification is an important concept because the general theory and methods of solution usually apply only to a given class of equations. Six basic classifications are

1. *Order of the PDE.* The order of a PDE is the order of the *highest partial derivative* in the equation, for example,

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{(second order)}$$

تعبیر این پاسخ ها بالطبع شد:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(C'_n \cos\lambda_n t + D'_n \sin\lambda_n t\right)$$

$$C'_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$D'_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

if initial velocity is zero, $g(x) = 0$

$$\rightarrow g(x)=0 \longrightarrow D'_n = 0 \rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\lambda_n t \quad , \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{cn\pi}{l}t = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}\right]$$

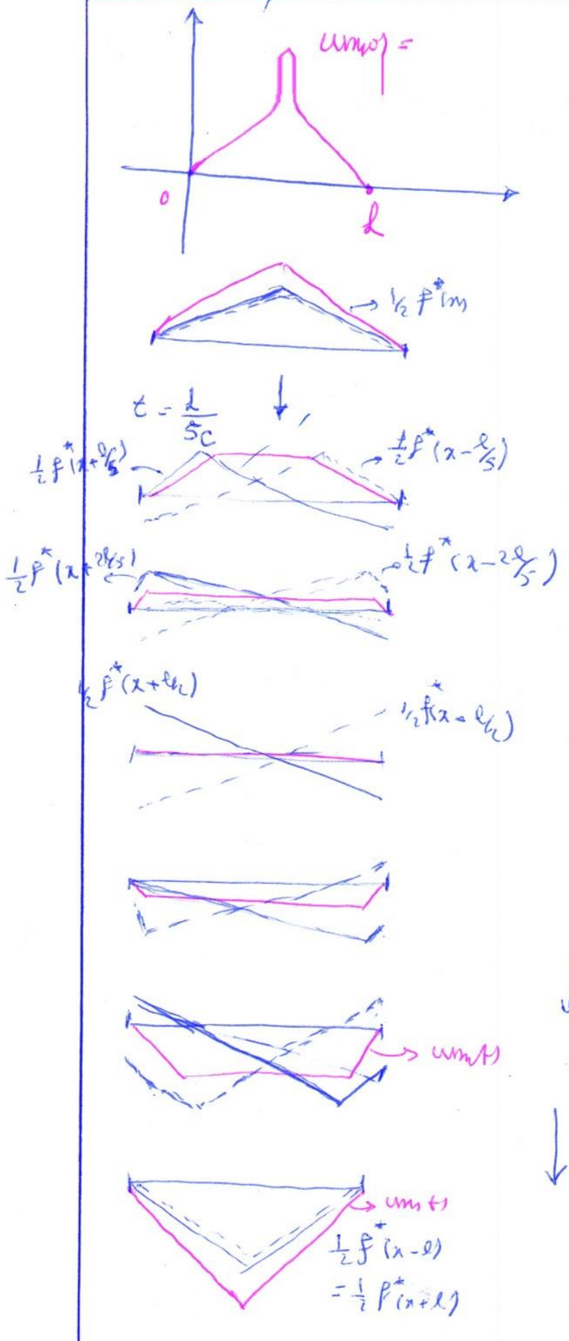
$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}} + \cancel{\sin}\ \underbrace{\frac{1}{2}\sum C'_n \sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)}$$

معادل تابع f با $x \leftarrow x-ct$ معادل تابع f با $x \leftarrow x+ct$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right]$$

f^* تعمیم گسترش یافته f بصورت فرد و متناوب با $\underline{\underline{2l}}$.

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x, & 0<x<\frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$



$\downarrow t = \frac{l}{5c}$

$\downarrow t = \frac{2l}{5c}$

$\downarrow t = \frac{l}{2c}$

$\downarrow t = \frac{3l}{5c}$

$\downarrow t = \frac{4l}{5c}$

$\downarrow t = \frac{l}{c}$

عنوان   تاریخ   مرجع   ۱۴۱ صفحه

حل به روش دالامبر برای معادله موج یک بعدی

D'Alembert's Solution of the wave equation.

دستگاه کوشی زیر را مربوط به نخ نامحدود همراه شرایط مرزی آغازین در نظر بگیرید

$u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

تغییر متغیر ، $x+ct=v$

$x-ct=w$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\Big(\cancelto{1}{\frac{\partial v}{\partial x}}\Big)+\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\cancelto{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}=\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}\Big)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial w}\Big(\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}\Big)\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+\frac{\partial u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial u}{\partial w\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$$

به طریق مشابه

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$$

با جاگذاری در معادله مرجع

$$\rightarrow 4\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}=0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial w}\Big(\frac{\partial u}{\partial v}\Big)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}=h(v) \rightarrow u=\underbrace{\int h(v)\,dv}_{\phi(v)}+\psi(w)$$

$$u=\phi(v)+\psi(w)$$

$$u=\phi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

حل دالامبر

D'Alembert's solutions satisfying the initial conditions:

$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$

$u_t(x,t) = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct) \Rightarrow u_t(x,0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x)$

$\rightarrow u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$

$\rightarrow g(x) = c\phi'(x) - c\psi'(x) \rightarrow \phi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{c} g(x)$

$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + K$, $K = \phi(x_0) - \psi(x_0)$

$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$

$\rightarrow \phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + \frac{1}{2}K$

$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds - \frac{1}{2}K$

if ~~$x \to x$~~

$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$

$= \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2}K(x_0) + \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(s)\,ds - \frac{1}{2}K(x_0)$

$= \frac{1}{\ldots} f \ldots \int^{x+ct}$

عنوان	تاریخ	مرجع	۱۸ صفحه

$g=0$

* ثابت کنید که اگر بخواهیم شرایط مرزی $u(l,t)=u(0,t)=0$ برقرار باشد f و g باید متناوب و فرد با دوره تناوب $2l$ باشند؟

$$\text{if } g(x)=0 \rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]$$

$$\rightarrow u(0,t)=0 \rightarrow f(ct)+f(-ct)=0 \;,\; f(ct)=-f(-ct)$$

$$u(l,t)=0 \rightarrow f(l+ct)+f(l-ct)=0$$

f باید فرد باشد.

$$f(l+ct)=-f(l-ct)=f(ct-l)$$

f به صورت متناوب با دوره تناوب $2l$ است.

قبلاً به دست آورده‌ایم

$f^* \xrightarrow{2l}$ گسترش متناوب فرد $f(x)$ با دوره تناوب

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]$$

مثال: مسئله زیر را با استفاده از دالامبر حل کنید.

$u_{tt}=c^2u_{xx}$

$u(x,0)=\sin x$

$u_t(x,0)=\cos x$

$u(0,t)=u(l,t)=0$

$$\rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+ct)+\sin(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\cos\xi\, d\xi$$

$$=\sin x\cos ct+\frac{1}{2c}\left[\sin(x+ct)-\sin(x-ct)\right]$$

$$=\sin x\cos ct+\frac{1}{c}\cos x\sin ct$$