بنام خداوند جان و خرد

دانشگاه سمنان

عنوان

دست نوشته های ریاضی مهندسی

(قسمت دوم)

مدرس:

محمدصادق ولی پور

اسفند ۱۳۹۸

1-D Heat equation — "معادله انتشار حرارت" یک بعدی

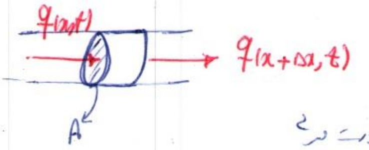
From the wave equation we now turn to the next "big" PDE, the heat equation.

if $u = u(x,t)$ is a temperature equation depended on x, t so

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}.$$

Mathematical Modelling:

اگر میله‌ای که همگن و دارای سطح مقطع یکسان باشد و انتقال حرارت فقط در امتداد طول میله باشد.



$\cancel{q(x+\Delta x,t) - q(x,t) = \rho A \Delta x \sigma \frac{\partial u}{\partial t}}$

تغییرات انرژی درون حجم کنترل = حرارت خروجی − حرارت ورودی

$q(x,t)$: Heat per unit Area and unit time — حرارت بر واحد زمان بر واحد سطح

$$A\,q(x,t) = A\,q(x+\Delta x,t) + \overbrace{\rho A \Delta x}^{\text{جرم}}\,\sigma\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

σ: ظرفیت گرمایی ویژه

$$-\frac{q(x+\Delta x,t) - q(x,t)}{\Delta x} = \rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -\frac{\partial q}{\partial x} = \rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}$$

$\Delta x \to 0$

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \text{قانون فوریه} \rightarrow q$$

گرما از جهت گرم به سمت سردتر متناسب با دما می‌رود

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t}$$

K بستگی به جنس میله ندارد و K=Const

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho\sigma}{K}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow$$

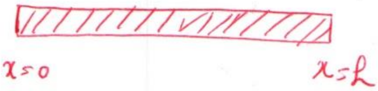
معادله انتشار حرارت در یک بعد

به طور مشابه برای یک مسئله دو و سه بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

به این معادله، معادله فوریه دیفرانسیل نیز گویند.



حل معادله حرارت در یک بعد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

B.C. :

$u(0,t) = 0$

دمای سر میله‌ها در صفر نگه داشته‌ایم

$u(l,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

شرایط اولیه.

20'

شرایط مرزی :

Dirichlet problem

کلا سه نوع شرط مرزی داریم (بسته به فیزیک مسئله)

۱- یا مقدار تابع در روی مرز معلوم است ← شرط مرزی نوع دیریکله Dirichlet B.C.

$$u(x,t)\Big|_{x=\text{مرز}} = \text{معلوم} \qquad \text{or} \quad u(0,t) = u(l,t) = \alpha(t)$$

Neumann problem

۲- یا مشتق تابع روی مرز معلوم است ← شرط مرزی نوع نیومان (Neumann)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\text{مرز}} = \text{معلوم} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l} = \overset{\text{معلوم}}{\beta(t)}$$

Robin problem

۳- شرط مرزی مخلوط (Robin یا mixed)

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\Big|_{x=\text{مرز}} = \text{معلوم} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\text{مرز}} = -ku\Big|_{\text{مرز}}$$

حل مسئله یک بعدی

Separation of variable

$$u(x,t) = F(x)\,G(t) \rightarrow F''G - \frac{1}{c^2}\times F\dot{G} = 0$$

$$\xrightarrow{\div FG} \frac{F''}{F} = \frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G} = \begin{cases} p^2 \\ 0 \\ -p^2 \end{cases}$$

if select p^2 $\rightarrow$ $\frac{F''}{F} = p^2 \rightarrow F'' - p^2F = 0 \;,\; F = Ae^{px} + Be^{-px}$

B.C.,

$$u(0,t) = F(0)\,G(t) = 0 \xrightarrow{G(t)\neq 0} F(0) = 0$$

$$u(l,t) = F(l)\,G(t) = 0 \xrightarrow{G(t)\neq 0} F(l) = 0$$

$$F = Ae^{px} + Be^{-px}$$

$$F(0) = A + B = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} e^{pl} & e^{-pl} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0, \quad \det(\;)\neq 0$$

So $A=B=0$

$$F(l) = Ae^{pl} + Be^{-pl} = 0$$

if we select "0" $\longrightarrow$ Also $A=B=0$ (please prove)

We should select $-p^2$

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G} = -p^2 \quad \rightarrow \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$F(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$F(l) = 0 \longrightarrow B\sin pl = 0 \xrightarrow{B\neq 0} \sin pl = 0, \quad pl = n\pi$$

$$p = \frac{n\pi}{l} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$F_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l}x \quad , n = 1, 2, \ldots$$

For G: $\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G} = -p^2 \rightarrow \dot{G} + p^2c^2 G = 0 \rightarrow \dot{G} + (\underbrace{\frac{n\pi c}{l}}_{\lambda_n})^2 G = 0$

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0, \quad G_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

V4

$\rightarrow u_n(x,t) = F_n(x)\, G_n(t) = D_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\lambda_n^2 t}$

these are the eigenfunctions of the Problem, Corresponding to the eigenvalues $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$

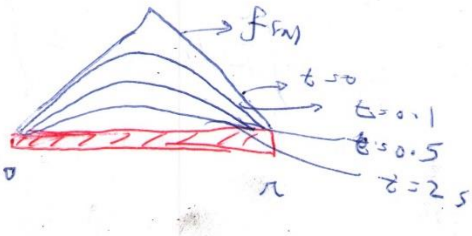
$$\rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\lambda_n^2 t}$$

initial condition:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx$$

اگر f(x) را گسترش فرد بدهیم



حل نمودار [illegible]

حل معادله انتقال حرارت با شرایط مرزی غیر همگن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$u(0,t) = T_0$$

$$u(l,t) = T_1$$

$$u(x,0) = f(x)$$

در این حالت استفاده مستقیم از جداسازی متغیرها **مفید نخواهد بود.**

در این حالتها استراتژی مناسب این است که معادله را برحسب متغیرهای جدید بنویسیم به طوریکه مسئله جدید دارای شرایط مرزی همگن باشد.

Step 1 Find the steady state, or equilibrium solution $u_E(x)$

$$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{که پاسخ حالت گذرا}} + u_E(x)$$

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = u_E(x)$$ پاسخ حالت پایدار

پاسخ حالت پایدار به شرایط اولیه بستگی ندارد

" " گذرا تابع " " می‌باشد.

پس $u_E(x)$ بایستی در تمام شرایط مسئله صدق کند.

$$u(x,t) = u_E(x) \longrightarrow \begin{cases} u_E''(x) - 0 = 0 \\ u_E(0) = T_0 \\ u_E(l) = T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_E(x) = Ax + B \\ u_E(0) = T_0 \rightarrow B = T_0 \\ u_E(l) = T_1 \rightarrow A = \dfrac{T_1 - T_0}{l} \end{array}$$

$$u_E(x) = \frac{T_1 - T_0}{l}x + T_0$$

* در حالت کلی پاسخ با شرایط مرزی ثابت

پاسخ حالت پایدار از حل معادله لاپلاس پیدا می‌شود یعنی:

$$\nabla^2 u = 0$$

step 2. Transform variables by introducing a new variables $v(x,t)$

$$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x) = u(x,t) - \left(\frac{T_1 - T_0}{l}\right)x + T_0$$

حال نشان می دهیم که جزء گذرا در معادله با شرایط مرزی همگن صدق می کند؟

$$u(0,t) = T_0 = v(0,t) + u_E(0) \Rightarrow v(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = T_1 = v(l,t) + u_E(l) \Rightarrow v(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) = v(x,0) + u_E(x) \Rightarrow v(x,0) = f(x) - u_E(x) = h(x)$$

که تابع معلوم جدید

بنابراین $v(x,t)$ در معادله صدق می کند چون ترکیب خطی دو جواب معادله است!!

• $v(x,t)$ به طور مشابه که قبلاً گفته شد به دست می آید.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\lambda_n t} \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

step 3.

$$u(x,t) = u_E(x) + v(x,t) = \left(\frac{T_1 - T_0}{l}\right)x + T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

بنابراین مسئله به دو مسئله مجزا رسید که مستقل از هم حل می شوند:

$$\begin{cases} u_E''(x) = 0 \\ u_E(0) = T_0 \\ u_E(l) = T_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{xx} - \frac{1}{c^2} v_t = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = h(x) = \text{معلوم} \end{cases}$$

25'

$Lu = 0$

نکته: عملگر خطی L را در نظر بگیرید

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L u_1 + \beta L u_2$$

α و β ضرایب ثابت هستند.

در معادله مسئله ما $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$

if we have: $L(u) =$ معلوم

$u|_{\text{مرز ۱}} = a_1$

$u|_{\text{مرز ۲}} = a_2$

این مسئله را می‌توان به چند مسئله جدا تقسیم کرد:

$L(u_1) =$ معلوم	$L(u_2) = 0$	$L(u_3) = 0$
$u_1\|_{\text{مرز ۱}} = 0$	$u_2\|_{\text{مرز ۱}} = a_1$	$u_3\|_{\text{مرز ۱}} = 0$
$u_2\|_{\text{مرز ۲}} = 0$	$u_2\|_{\text{مرز ۲}} = 0$	$u_3\|_{\text{مرز ۲}} = a_2$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

که u در تمام شرایط مسئله صدق می‌کند.

Heat Equation With heat Source:

by modification the energy balance on the ~~bed~~ rod as:

Change of heat energy of segment in time Δt = heat in from left boundary − heat out from right boundary + heat generated in segment

با نوشتن معادله تعادل انرژی داریم:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q \qquad , q = q(x)$$

$q>0$ heat generated

$q<0$ heat absorbed.

$u(0,t) = b_1 \qquad u(l,t) = b_2 \qquad t>0$

$u(x,0) = f(x) \qquad 0<x<l$

در این حالت نیز مطابق شرایط مرزی غیرهمگن در نظر می‌گیریم:

$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x)$

$\rightarrow \quad 0 = u_E'' + q(x) \qquad 0<x<l$

$u_E(0) = b_1$

$u_E(l) = b_2$

$\frac{1}{c^2} v_t = v_{xx}$

$v(0,t) = 0$

$v(l,t) = 0 \qquad t>0$

$v(x,0) = f(x) - u_E(x) \qquad 0<x<l$

Heat equation With Periodic boundary Conditions

پیش از این ما معادله انتقال حرارت غیرهمگن را با شرایط مرزی ثابت یا مستقل از زمان حل کردیم

حال ما نشان می‌دهیم که در حالت غیرهمگن با شرایط مرزی تابع زمان با مسئله چگونه برخورد می‌کنیم.

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = A\cos\omega t$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < 1$$

What can we do ?

Semi infinite bar or Region ناحیه نیم محدود یا میله نیم محدود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$u(0,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \text{محدود} = \text{کراندار}$$

$$u(x,t) = F(x)\,G(t) \;\rightarrow\; F''(x)\,G - \frac{1}{C^2}\dot{G}X = 0$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{C^2}\frac{\dot{G}}{G} = \begin{cases} P^2 \\ 0 \\ -P^2 \end{cases}$$ → به جواب صفر منجر می‌شود

$$\frac{F''}{F}=0 \rightarrow F''=0, \quad F=AX+B$$

$$x\rightarrow\infty \Longrightarrow F\rightarrow\infty$$

$$\frac{F''}{F}=P^2 \rightarrow F''-P^2F=0, \quad F(x)=Ae^{Px}+Be^{-Px}$$

$$F(0)=0\rightarrow A+B=0$$

$$F(\infty)<M$$

کراندار باشد

$$\lim_{x\rightarrow\infty} F(x)=\infty$$

$$\frac{F''}{F}=-P^2 \rightarrow F''+P^2F=0 \rightarrow F(x)=A\cos Px+B\sin Px$$

$$u(x=0,t)=0 \rightarrow F(0)\,G(t)=0 \longrightarrow F(0)=0$$

$$F(0)=0 \longrightarrow A=0$$

So, $F(x)=B\sin px$

P یک ثابت دلخواه است که می‌تواند از صفر تا بی‌نهایت باشد.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\dot G}{G}=-P^2 \rightarrow \dot G=\frac{dG}{dt}=-P^2c^2G \rightarrow G(t)=G'e^{-P^2c^2t}$$

$$u(x,t,P)=D(p)\sin(px)e^{-P^2c^2t}=D(p)\sin(px)\,e^{-P^2c^2t}$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t,P)\,dP=\int_0^\infty D(p)\,e^{-P^2c^2t}\sin px\,dP$$

I.C.

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^{\infty} D(p)\sin px\,dp$$

$f(x)$ بصورت انتگرال سینوسی فوریه بدست آمده است

$$D(p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(\alpha)\sin p\alpha\,d\alpha$$

نکته: کلیه مسئله‌های نیم محدود و نامحدود به صورت انتگرال جواب دارند

میله نامحدود "Infinite Region or bar"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=\text{کراندار}$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)\longrightarrow F''G-\frac{1}{c^2}\dot{G}F=0,\ \cancel{\frac{F}{F}}$$

$$\xrightarrow{\div FG}\ \frac{F''}{F}-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=0$$

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=\begin{cases}p^2\\0\\-p^2\end{cases}$$

$\left.\begin{matrix}p^2\\0\end{matrix}\right\}$ به هیچ جواب کرانداری منجر نمی‌شوند

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=-p^2$$

$$\rightarrow \frac{F''}{F}=-p^2\rightarrow F''+p^2F=0\rightarrow F(x)=A\cos px+B\sin px$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=-p^2\rightarrow \dot{G}+c^2p^2G=0\longrightarrow T(t)=Ce^{-p^2c^2t}$$

$$u(x,t,p)=\left(a_{(p)}\cos px+b_{(p)}\sin px\right)e^{-p^2c^2t}$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-p^2c^2t}(a\cos px + b\sin px)\,dp \qquad 0 < p < \infty$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty \left[a(p)\cos px + b(p)\sin px\right] dp$$

$$a(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\, dv$$

$$b(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\, dv$$

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\,dv\cos px + \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\,dv\sin px\right] dp$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\{\cos pv\cos px + \sin pv\sin px\}\,dv\right] dp$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)\,dv\,dp$$

Similarly For $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)\,e^{-c^2p^2t}\,dv\right] dp$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px - pv)\,dp\right] dv$$

محاسبه را راحت‌تر کنیم با استفاده از فرمول زیر

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\cos 2bs\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \rightarrow$$ بعداً محاسبه می‌شود

$$b = \frac{p(x-v)}{2pc\sqrt{t}} = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}} \qquad \text{or} \quad s = pc\sqrt{t}$$
$$ds = c\sqrt{t}\,dp$$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos(px - pv)\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}$$

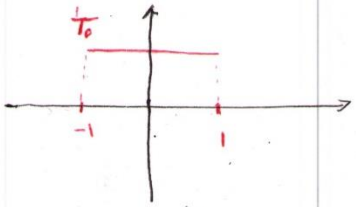
$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\} dv$$

$$\text{if} \quad z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}} \rightarrow dz = \frac{dv}{2c\sqrt{t}}$$

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2c\sqrt{t}\,z)\, e^{-z^2} dz$$

Example: Final
Temperature in an Infinite Bar if initial temperature is

$$f(x) = \begin{cases} T_0 = \text{const} & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$



$$\cancel{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0\, e^{-z^2} dz}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\} dv$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} T_0 \exp\left\{-\frac{(x-\vartheta)^2}{2c^2 t}\right\} d\vartheta$$

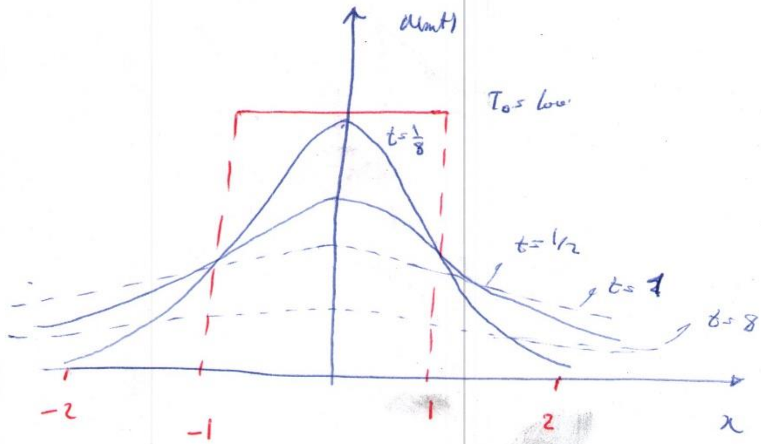
$$z = \frac{-x+\vartheta}{2c\sqrt{t}}$$

$$\vartheta = 1 \longrightarrow z = \frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$$

$$\vartheta = -1 \longrightarrow z = \frac{-(1+x)}{2c\sqrt{t}}$$

$$U(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{(1+x)}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz$$

if $c^2 = 1 \frac{cm^2}{s}$, $T_0 = 100\,°C$



تابع خطا Errore function

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,dz$$

خواص تابع خطا

۱- تابع خطا، تابعی است فرد یعنی

$$\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$$

۲- برای حالت $x=\infty$

$$\operatorname{erf}(\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=1$$

۳- تابع خطا برای $x\in(-\infty,\infty)$ تابعی پیوسته است

مثال: مطلوب است جواب معادله دیفرانسیل حرارت موقعی که $f(x)=\begin{cases}u_0 & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$ این جواب را به صورت تابع خطا بنویسید

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,dv$$

$$\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}=z \Rightarrow u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,dz$$

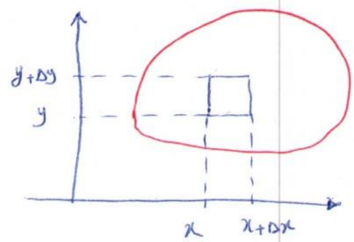
$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}\right)\right]$$

two dimentional wave equation: Vibrating a Membrane:

ارتعاش یک تار منجر به معادله موج یک بعدی شد.

ارتعاش یک صفحه ۲ بعد را بررسی قرار دهیم

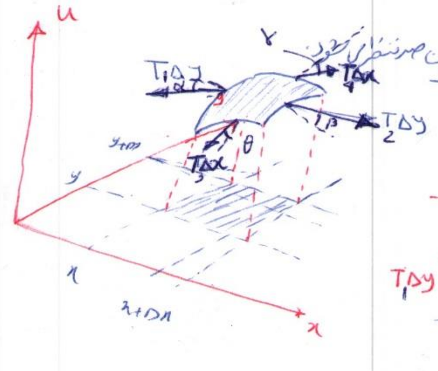
Modelling

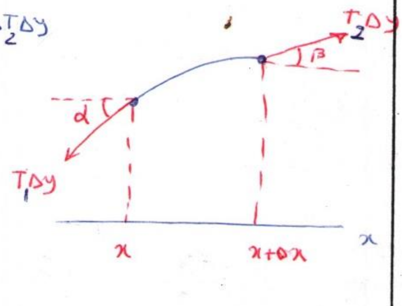


فرضیات: غشا در هر جا کشیده شده و نیروی کشش در همه جهات یکسان است

- دامنه ارتعاش بسیار کوچک است و ارتعاش عمودی است

- غشا سبک بوده و از اثر نیروی وزن صرف‌نظر می‌شود





$\sum F_x = \sum F_y = 0$

چون ارتعاش عمودی است برآیند صفر است

y مجموع نیروها در جهت عمودی $= T_2\Delta y\sin\beta - T_1\Delta y\sin\alpha$ ~~$T\Delta x$~~

x 〃 〃 〃 افقی $T_2\Delta y\cos\alpha = T_1\Delta y\cos\beta$

Since the angles are smal, ~~so~~ we may replace $\sin\alpha \approx \tan\alpha$
$\sin\beta \approx \tan\beta$

33΄-1

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_2 \Delta y \cos\alpha = T_1 \Delta y \cos\beta$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_3 \Delta x \cos\theta = T_4 \cos\gamma \Delta x$$

(I)

Assumption : $T_1 \Delta y \cos\alpha = T_2 \Delta y \cos\beta = T_3 \Delta x \cos\theta = T_4 \cos\gamma = \text{Const} = T$

$$z\uparrow \sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \left(T_2 \Delta y \sin\beta - T_1 \Delta y \sin\alpha\right) + \left(T_4 \sin\gamma - T_3 \sin\theta\right)\Delta x$$

$$= \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال T_1، T_2، T_3 و T_4 را از رابطه (I) جایگزین می‌کنیم

$$T\left\{(\tan\beta - \tan\alpha)\Delta y + (\tan\gamma - \tan\theta)\Delta x\right\} = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

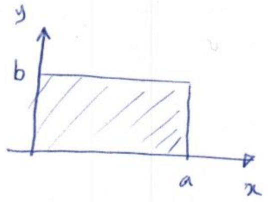
$$T\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x,\,y} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,\,y}\right\}\Delta y + T\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y,\,x} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y,\,x}\right\}\Delta x = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\div \Delta x \Delta y$

$$T \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x,\,y} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,\,y}}{\Delta x}\right\} + T \lim_{\Delta y \to 0}\left\{\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y,\,x} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y,\,x}}{\Delta y}\right\} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Rectangular Membrane: Solution of Wave equation in two-Dimensional



$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0$$

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$$

$$u(x,y,0) = f(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y)$$

Separation of variable:

$$u(x,y,t) = F(x)\,H(y)\,G(t)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله موج}} F''HG + H''FG - \frac{1}{c^2}\ddot{G}FH = 0$$

$$\xrightarrow{\div FHG} \frac{F''}{F} + \frac{H''}{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = 0 \quad , \quad \frac{F''}{F} = \frac{-H''}{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = \begin{cases} 0 & \times \\ k_x^2 & \times \\ -k_x^2 \end{cases}$$

قبلاً اثبات شد که k_x^2 ، ۰ به جواب غیر صفری نمی‌رسند.

$$\frac{F''}{F} = -k_x^2 \; , \quad F'' + k_x^2 F = 0 \longrightarrow F(x) = A\cos k_x x + B\sin k_x x$$

$$u(0,y,t) = 0 = F(0)\,H(y)\,G(t) = 0 \longrightarrow F(0) = 0$$

$$u(a,y,t) = 0 = F(a)\,H(y)\,G(t) = 0 \longrightarrow F(a) = 0$$

$$F(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$F(a) = 0 \longrightarrow B\sin k_x a = 0 \longrightarrow k_x a = m\pi \; , \quad k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$X_m(x) = B_m \sin\frac{m\pi}{a}x \quad , \; m = 1, \dots$$

$$-\frac{H''}{H}+\frac{1}{c^2}\frac{\ddot G}{G}=-k_x^2 \longrightarrow \frac{H''}{H}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot G}{G}+k_x^2=\begin{cases} k_y^2 \; \times \\ 0 \; \times \\ -k_y^2 \end{cases}$$

به جواب صحیح منجر نمی‌شوند

$$\frac{H''}{H}=-k_y^2 \longrightarrow H''+k_y^2H=0,\quad H(y)=C\cos k_y y+D\sin k_y y$$

به طور

$$U(x,0,t)=F(x)H(0)G(t)=0 \longrightarrow H(0)=0$$

$$U(x,b,t)=F(x)H(b)G(t)=0 \longrightarrow H(b)=0$$

$$H(0)=0 \rightarrow C=0$$

$$H(b)=0 \longrightarrow D\sin k_y b=0 \xrightarrow{D\neq 0} k_y b=n\pi,\quad k_y=\frac{n\pi}{b}$$

$$H_n(y)=D_n\sin\frac{n\pi}{b}y,\quad n=1,2,\dots$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot G}{G}+k_x^2=-k_y^2 \longrightarrow \ddot G+c^2(k_x^2+k_y^2)G=0$$

$$\ddot G+c^2\underbrace{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]}_{\lambda_{mn}^2}G=0$$

$$\ddot G+c^2\lambda_{mn}^2G=0,\quad G_{mn}(t)=E_{mn}\cos\lambda_{mn}t+F_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

$$U_{mn}(x,y,t)=F_m(x)H_n(y)G_{mn}(t)$$

$$=\left(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$U(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y$$

"Double Fourier Series"

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{n\pi}{b}y}_{K_m(y)}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

بسط سری فوریه $f(x,y)$

$$K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

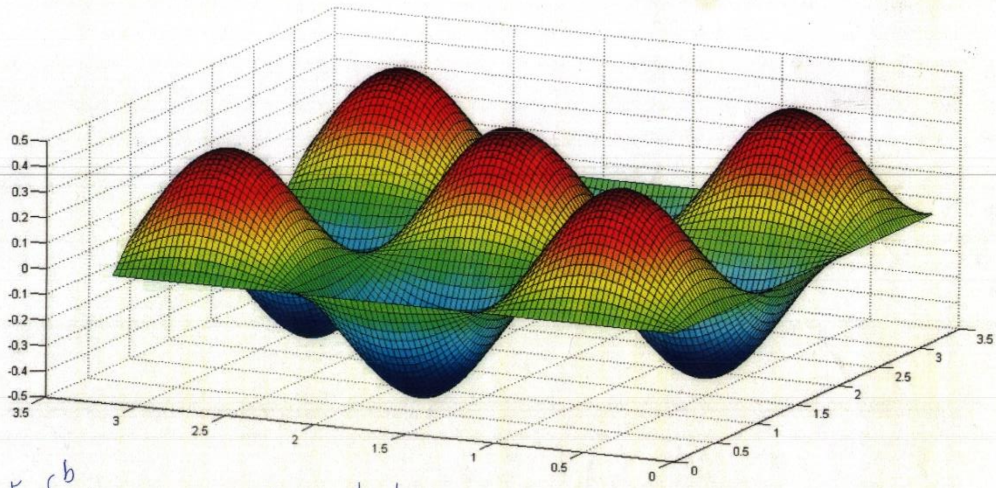
$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$a_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$\rightarrow\ a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy \qquad m=1,2,\dots \quad n=1,2,\dots$$

بطور مشابه

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \qquad m=1,2,\dots \quad n=1,2,\dots$$



$$a_{mn} = \frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy = \int_0^b\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

به ازای $m=3$ و $n=3$ رسم شده است

مثال: مطلوبست معادله حرکت موجی دو بعدی با فرض آنکه $f(x,y)=xy$ و $g(x,y)=0$

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$u(a,y,t)=u(0,y,t)=0$$

$$u(x,0,t)=u(x,b,t)=0$$

$$u(x,y,0)=xy=f(x,y)$$

$$u_t(x,y,0)=0=g(x,y)$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos c\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin c\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\left\{\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$b_{mn}=\frac{4}{abc\lambda_{mn}}\int_0^b\left\{\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

• وقتی $f(x,y)$, $g(x,y)$ به صورت فرد نسبت به x و y با دوره تناوب $2a$, $2b$ توسعه می‌دهیم.

$$g(x,y)=0\longrightarrow b_{mn}=0$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\left\{\int_0^a yx\sin\frac{m\pi}{a}x\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$=\frac{4}{ab}\left\{\int_0^b y\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy\right\}\times\left\{\int_0^a x\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx\right\}=\frac{(-1)^{m+n}4ab}{mn\pi^2}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4ab}{mn\pi^2}(-1)^{m+n}\cos(c\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

مثال: معادله انتقال حرارت دو بعدی:

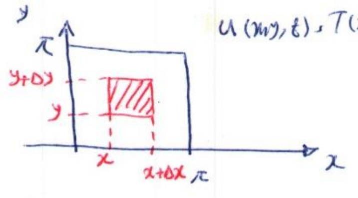
اگر نقاط سرحدی یک صفحه مربعی $\pi \times \pi$ را با حرارت صفر نگه داریم و حرارت اولیه را با $f(x,y)$ فرض کنیم،

اولاً - نشان دهید که معادله انتقال حرارت به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

است.

ثانیاً - معادله فوق را حل کنید.



$u(x,y,t) = T(x,y,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{K}{\rho\sigma}$$

ضریب هدایت (K)، چگالی (ρ)، گرمای ویژه (σ)

$$\left(q_x - q_{x+\Delta x}\right)\Delta y + \left(q_y - q_{y+\Delta y}\right)\Delta x = \rho\sigma\,\Delta x\Delta y\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$q_x = -K\frac{\partial T}{\partial x}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0$

$u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0$

$u(x,y,0) = f(x,y)$

از روش جداسازی متغیرها

$$u(x,y,t) = F(x)H(y)G(t) \longrightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{H''}{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\dot G}{G} = \begin{cases} \cancel{\ } P_x^2 \\ 0 \\ -P_x^2 \end{cases}$$

$$\dot G + c^2\lambda^2 G = 0$$

$$F'' + P_x^2 F = 0 \longrightarrow F(x) = A_1\cos P_x x + B_1\sin P_x x \Rightarrow F(0)=0 \to A_1 = 0$$

$F(\pi) = 0 \Rightarrow B_1\sin P_x\pi = 0$

$B_1 \neq 0, \ \sin P_x\pi = 0 \Rightarrow P_x\pi = n\pi$

$\boxed{P_x = n}$

$$\frac{H''}{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\dot G}{G} + P_x^2 = \begin{cases} P_y^2 \\ 0 \\ -P_y^2 \end{cases} \Rightarrow H'' + P_y^2 H = 0 \Rightarrow$$

$$H = A_2\cos P_y y + B_2\sin P_y y$$

$H(0) = 0 \quad A_2 = 0, \quad H(\pi) = 0 \to \sin P_y\pi = 0$

$P_y\pi = m\pi$

$\boxed{P_y = m}$

$$\dot{G} + c^2(P_x^2+P_y^2)G = 0 \longrightarrow G = C_1 e^{-c^2\overbrace{(P_x^2+P_y^2)}^{\lambda_{mn}^2}t} = C_1 e^{-c^2\lambda_{mn}^2 t}$$

$$\lambda_{mn}^2 = P_x^2+P_y^2 = \boxed{m^2+n^2}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin nx \sin my \, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x,y) \sin my \, dy\right\} \sin nx \, dx$$

مثال: مطلوبست حل معادله موج در مختصات قطبی دو بعدی

$C=1,\ R=1=a,$ سر : $u=u(r,t)$

$f(r)=0.1 J_0(\alpha_2 r)$ و $g(r)=0$ ،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[E_m \cos\lambda_m t + F_m \sin\lambda_m t\right] J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right)$$

$u(r,0) = f(r) = 0.1 J_0(\alpha_2 r)$

$u_t(r,0) = g(r) = 0$

$$\lambda_m = c\frac{\alpha_m}{a} = c k_m$$

$$c=1,\ a=1 \rightarrow u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[E_m \cos\alpha_m t + F_m \sin\alpha_m t\right] J_0(\alpha_m r)$$

$$g(r)=0 \longrightarrow F_m = 0$$

$$f(r)=0.1 J_0(\alpha_2 r) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} E_m \cos\alpha_m t \, J_0(\alpha_m r)$$

E_m ها صفر شد بجز $m=2$

$$\rightarrow u = 0.1 \cos\alpha_2 t \, J_0(\alpha r)$$

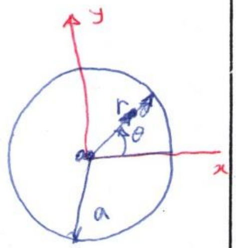
Circular Membrane :

Wave equation in rectangular coordinate system

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

to transform the laplacian in the wave equation :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$



$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$u_{xx} = (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x$$

$$= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}$$

$$= (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx}$$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \quad , \quad \theta_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{r^2}$$

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} \quad , \quad \theta_{xx} = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

با جاگذاری این روابط

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

laplacian of u in polar coordinate

برای معادله موج با فرم در دستگاه مختصات قطبی خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\begin{cases} u(a,\theta,t) = 0 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta) \quad 0 \leq r \leq a,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta) \end{cases}$$

حال اگر برای یک دایره‌ای به شعاع R حل کنیم و فرض مسئله به صورت شعاعی متقارن باشد آنگاه $u_{\theta\theta}=0$ می‌شود و داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$$

$u(R,t) = 0$ — فرض شده دایره‌ای در $r=R$ فیکس شده است.

$u(r,0) = f(r)$

$u_t(r,0) = g(r)$

using separation of variable:

$u(r,t) = R(r)\,G(t)$

in equation: $R\ddot{G} = c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\cdot G\right)\right]$

$$\xrightarrow{\div RG} \quad \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \left[\frac{1}{Rr}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right] = \begin{cases} K^2 \\ 0 \\ -K^2 \end{cases}$$

منجر به جواب بی‌کران می‌شود
با زمان ارتعاش زیاد می‌شود و ناپایدار است
منجر به توابع مثلثاتی می‌شود

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = -k^2 \rightarrow \ddot{G} + c^2k^2 G = 0$$

$$\frac{1}{Rr}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -k^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + k^2 r R = 0$$

$$\rightarrow r\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{dR}{dr}+k^2rR=0 \longrightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2)R=0$$

if $x=kr$ تغییر متغیر

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{dr}=k\frac{dR}{dx}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(k\frac{dR}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(k\frac{dR}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dr}=k^2\frac{d^2R}{dx^2}$$

$$\rightarrow \left\{rk^2\frac{d^2R}{dx^2}+k\frac{dR}{dx}+k^2rR=0\right\}r$$

طرفین معادله را در r ضرب می‌کنیم

$$r^2k^2\frac{d^2R}{dx^2}+kr\frac{dR}{dx}+k^2r^2R=0$$

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+x^2R=0$$

معادله بسل از مرتبه صفر

$$\left(x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-n^2)R=0\right)$$

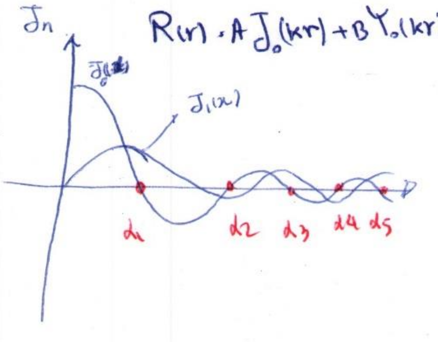
معادله بسل از مرتبه n

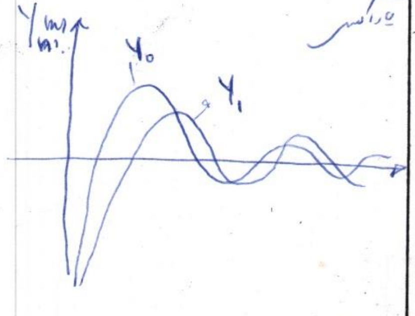
بسل نوع اول

بسل نوع دوم

$$R(\cancel{x})=AJ_0(x)+BY_0(x)$$

$$R(r)=AJ_0(kr)+BY_0(kr)$$





بنابراین چون جواب باید در $x=0=kr=0$ محدود باشد لذا $B=0$ است.

چون $Y_0(x)$ در $x=0$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند

$R(r) = A J_0(kr)$ or $R(r) = A J_0(kr)$

B.C. , $u(a,t) = 0 \rightarrow R(a)G(t) = 0 \rightarrow R(a) = 0$,

$\Rightarrow R(a) = A J_0(ka) = 0$

$$\underbrace{K_m a = \alpha_m}_{\text{صفر تابع بسل}} \longrightarrow \boxed{K_m = \frac{\alpha_m}{a}}$$

$\alpha_1 = 2.4048$, $\alpha_2 = 5.5201$, $\alpha_3 = 8.6537$, $\alpha_4 = 11.7915$, $\alpha_5 = 14.93$

$$R_m(r) = A J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} . r\right) \qquad , m = 1, 2, \ldots$$

$$\ddot{G} + \underbrace{K_m^2 c^2}_{\lambda_m^2} G = 0 \longrightarrow G(t) = C \cos \lambda_m t + D \sin \lambda_m t$$

$$u_m(r,t) = R_m(kr)\, G(t) = \left[E_m \cos \lambda_m t + D_m \sin \lambda_m t\right] J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right)$$

جواب کلی مسئله ترکیب خطی این جوابهاست:

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m \cos \lambda_m t + F_m \sin \lambda_m t\right] J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right)$$

که برای بدست آوردن E_m و F_m از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m J_0\left(\overset{K_m}{\frac{\alpha_m}{a}} r\right)$$

$$\int_0^a r J_m(k_n r) J_m(k_s r)\, dr = 0 \quad n \neq s.$$

توابع بسل با تابع وزنی x متعامد هستند

$$\int_0^a J_0(k_m r) . J_0(k_p r) . r\, dr = \begin{cases} 0 & m \neq P \\ \text{مقدار ثابت} & m = P \end{cases}$$

$$\int_0^a r f(r) J_0(k_m r)\, dr = \int_0^a E_m r J_0^2(k_m r)$$

$$\int_0^a f(r) J_0\left(\overset{k_m}{\frac{\alpha_m}{a}} r\right) r\,dr = E_m \frac{a^2}{2} J_1^2(k_m a)$$

Note:

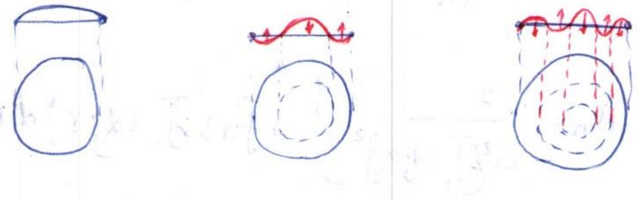
$$\int x^r J_{r-1}(x)\,dx = x^r J_r(x) + C$$

$$\int_0^R r J_0^2(k_n r)\,dr = \frac{R^2}{2} J_1^2(k_n R)$$

$$E_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) dr$$

F_m نیز به کمک روش ضرایب فوریه بسل حساب می‌شود [محاسبه کنید!]

$$F_m = \frac{2}{c k_m a^2 J_1^2(k_m a)} \int_0^a r g(r) J_0(k_m r)\,dr$$



$m=1$ $\quad$ $m=2$ $\quad$ $m=3$

در حالت کلی اگر θ نیز بستگی را داشته باشد.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(r,\theta,t) = R(r)\,\Phi(\theta)\,G(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = 0$$

جواب Φ نیز باید متناوب باشد با دوره تناوب 2π لذا

$$\ddot{G} + k^2c^2 G = 0$$

$$\Phi'' + \gamma^2 \Phi = 0$$

$$r^2 R'' + rR' + (k^2r^2 - \gamma^2)R = 0 \quad , \quad x = kr$$

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + (x^2 - \gamma^2)R = 0$$

بسل از مرتبه γ صورت شود.

Laplace equation.

مهم‌ترین معادله در رشته‌های مهندسی.

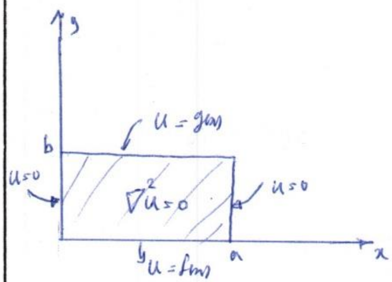
$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \longrightarrow \text{if } t \to \infty \to \nabla^2 u = 0$$

یعنی شرایط به حالت پایدار رسیده.

حل معادله لاپلاس:

در مسئله یک‌بعدی با یک بار انتگرال‌گیری جواب را رسید

برای مسئله دو بعدی در مختصات کارتزین



$$\nabla^2 u = 0$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(x,b) = g(x)$$

Solution, **Using Separation** of variable:

$$U(x,t) = X_{(x)}\, Y_{(y)} \longrightarrow$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''Y + Y''X = 0$$

$$\xrightarrow{\div XY} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \text{Const.} \begin{cases} k^2 \\ 0 \\ -k^2 \end{cases}$$

? چون در راستای x در $\begin{matrix} x=0 & u=0 \\ x=a & u=0 \end{matrix}$ ← تابع در راستای x متناوب است و از نوع sin و cos داریم.

to Find F_n & E_n $\longrightarrow$ we use the B.C. in y direction

$$y=0 \rightarrow u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi}{a}x$$

اگر $f(x)$ را گسترش فرد بدهیم با دوره تناوب $2a$

$$E_n=\frac{4}{2a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$u(x,b)=g(x)=\sum\Big(\underbrace{E_n\cosh\frac{n\pi}{a}b+F_n\sinh\frac{n\pi}{a}b}_{\alpha(n)}\Big)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\rightarrow g(x)=\sum\alpha(n)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\alpha(n)=\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

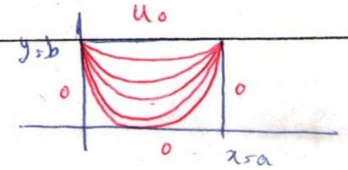
با گسترش فرد $g(x)$

$$F_n=\frac{\alpha(n)-E_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$$

با جایگذاری F_n و E_n در معادله پاسخ بدست می‌آید:

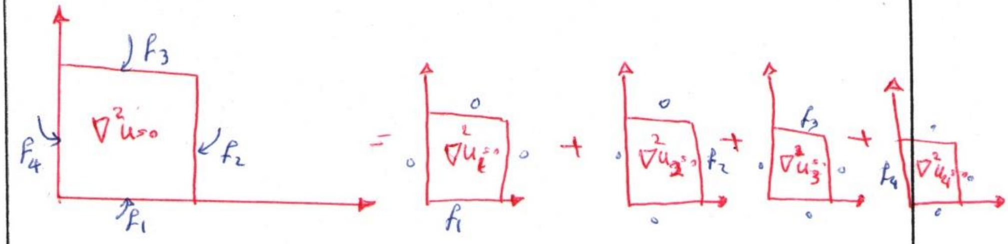
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}y}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}+\frac{E_n\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

if $f(x)=0$, $g(x)=u_0 \rightarrow u(x,y)\overset{??}{=}\frac{4}{\pi}u_0\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}y}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\sin\frac{n\pi}{a}x$

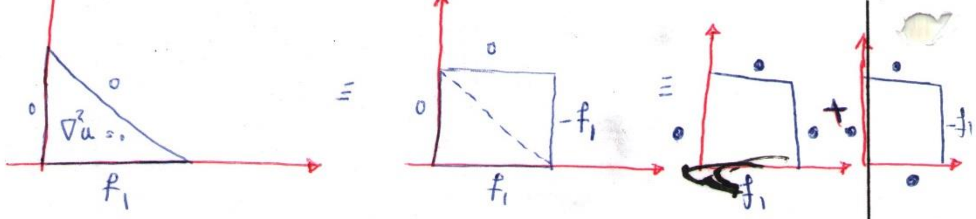


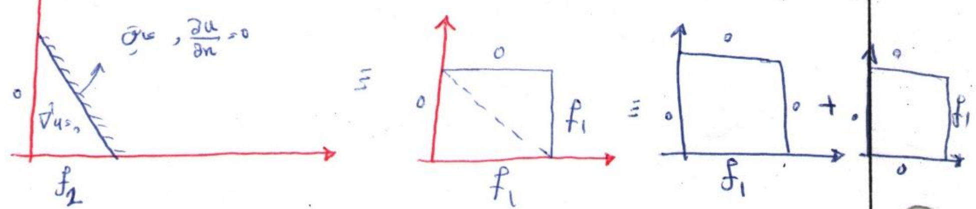
برای n ۵ جمله

نکاتی در مورد معادله لاپلاس :



$u = u_1+u_2+u_3+u_4$

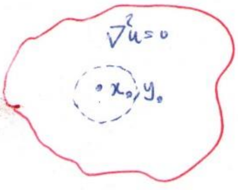




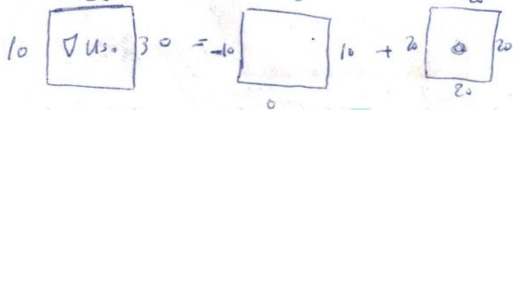
پاسخ‌های معادله لاپلاس توابع هارمونیک هستند که دارای خواص ذیل هستند.

- تابع هارمونیک در ناحیه مورد نظر دارای ماکزیمم و می‌نیمم نیست، اگر ماکزیمم و مینیمم داشته باشیم، بر روی مرز ناحیه است

- اگر u روی تمام مرز ثابت باشد مقدار u در تمام ناحیه مقدار ثابتی خواهد داشت.



- مقدار تابع هارمونیک در هر نقطه (x_0,y_0) برابر است با میانگین تابع روی هر دایره‌ای به مرکز (x_0,y_0) در ناحیه مشخص "Mean value theorem"



حل معادله لاپلاس در مختصات قطبی: (پاسخ کلی)

$$\nabla^2 u(r,\varphi) = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$\cancel{u(a,\varphi) =}$ شعر

Separation of variable:

$$u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$$

$$\xrightarrow{\text{in eq}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR'\Phi) + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$$

$$\xrightarrow[\times r^2]{\div R\Phi} \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \begin{cases} K^2 \\ 0 \\ -K^2 \end{cases}$$

K باید طوری انتخاب شود که Φ یک تابع متناوب باشد.

$$\frac{-\Phi''}{\Phi} \overset{?}{=} (-)K^2 \rightarrow +\Phi'' - K^2\Phi = 0 \rightarrow \Phi = Ae^{-K\varphi} + Be^{K\varphi}$$ غ ق ق

با افزایش K، Φ متناوب نیست؛ با افزایش φ به بی‌نهایت میرود $(A=B=0)$

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \rightarrow \Phi'' = 0 \rightarrow \Phi = A\varphi + B$$

چون Φ باید متناوب باشد بنابراین $A=0$ شد، چون این تابع با افزایش φ مرتباً افزایش می‌یابد.

بنابراین $\Phi = B$ می‌تواند یک مقدار ثابت باشد.

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = K^2 \longrightarrow \Phi'' + K^2\Phi = 0 \rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos K\varphi + B\sin K\varphi$$

$K = n$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = n^2 \longrightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0$$

$$R = r^\alpha \rightarrow \alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \pm n$$

$$R_n = r^n, r^{-n}, \quad R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

if $n=0 \rightarrow \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=0 \rightarrow r\frac{dR}{dr}=C$

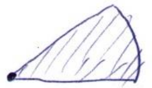
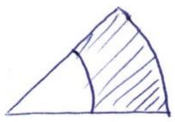
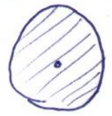
$\rightarrow \frac{dR}{dr}=\frac{C}{r} \rightarrow R = C_0 \ln r + D_0$

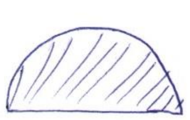
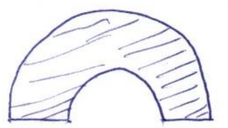
The genral solution is

$$U(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^n + D_n r^{-n})$$

$$= a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi) + r^{-n}(G_n \cos n\varphi + H_n \sin n\varphi)$$

که این پاسخ عام است برای نواحی هندسی زیر که E_n و G_n و H_n, F_n بسته به شرایط مرزی بدست می‌آیند به شرطی که φ متناسب باشد.

 or  or 

 or 

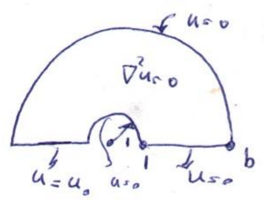
مثال: پاسخ معادله لاپلاس را با شرایط مرزی زیر محاسبه کنید:

$\nabla^2 u = 0$

$U(\varphi, 0) = \cancel{U(r,\pi)}\ 0 \qquad 1<r<b$

$U(r,\pi) = u_0 \qquad 1<r<b$

$U(1,\varphi) = U(b,\varphi) = 0 \qquad 0<\varphi<\pi$



حل برای ناحیه داخل دایره شکل:

$u(a,\varphi) = f(\varphi)$

$r: 0 \to a$

$\varphi: 0 \to 2\pi$

وقتی $r \to 0$ جواب باید کراندار باشد یعنی

$$u(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r^n (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi) + r^{-n} (G_n \cos n\varphi + H_n \sin n\varphi) \right\}$$

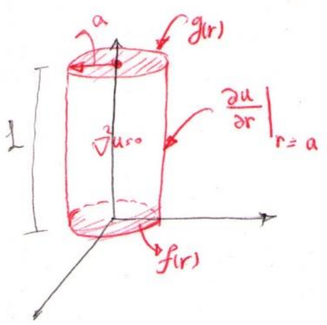
$$\to b_0 = 0, \quad G_n = H_n = 0$$

$$\to u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \quad , \ldots\ldots$$

حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای:

$u = u(r,\varphi,z)$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad \to \nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$



$u(r,z) = R(r) Z(z)$

از جداسازی متغیرها استفاده می‌شود

$Z(z) = A \cosh z + B \sinh kz$

$R(r) = C J_0(kr) + D Y_0(kr) \leftarrow$ نسبت به r به معادله بسل منجر می‌شود

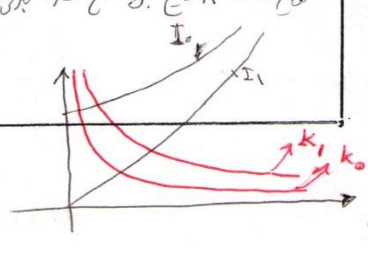
if $g(r) = f(r) = 0 \longrightarrow$ در جهت محور z تابع باید متناوب باشد لذا توابع مثلثاتی انتخاب می‌کنیم

$Z(z) = A \sin kz + B \cos kz$

$x^2 y'' + x y' + (-x^2 - n^2) y = 0$

در این حالت R تابع بسل اصلاح شده می‌شود

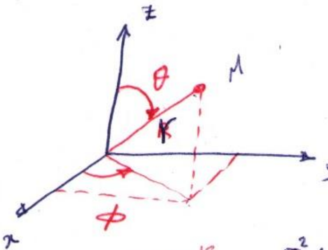
$R(r) = C I_0(kr) + D K_0(kr)$



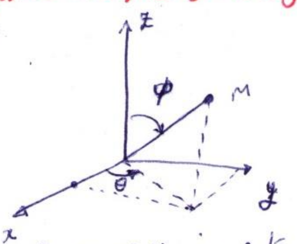
تابع بسل اصلاح شده نوع اول

تابع بسل اصلاح شده نوع دوم

حل معادله لاپلاس در مختصات کروی



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



مختصات کروی

$$\nabla^2 f(\ ) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(\ )}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(\ )}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\ )$$ در مختصات کروی

$u(r,\theta) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0$ متقارن نسبت به ϕ

$$\nabla^2 u(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$u(r,\theta) = R(r) * \Theta(\theta)$$

با جداسازی متغیرها

$$\rightarrow \begin{cases} r^2R'' + 2rR' - KR = 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + K\Theta = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$0 \le \theta \le \pi$

$$\omega = \cos\theta \rightarrow \frac{d\omega}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d\Theta}{d\omega}$$

$$\xrightarrow{(II)} (1-\omega^2)\Theta'' - 2\omega\Theta' + K\Theta = 0 \qquad -1 \le \omega \le 1$$

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\omega}, \quad \Theta'' = \frac{d^2\Theta}{d\omega^2}$$

$\omega = \pm 1$ نقاط تکین معادله گویند که این معادله به فرم سری حل می‌شود. از نوع فروبنیوس

و زمانی پاسخ کراندار خواهد بود که $K = n(n+1)$ شود (مسئله [illegible]) [illegible]

$$(1-\omega^2)\Theta'' - 2\omega\Theta' + n(n+1)\Theta = 0$$

این معادله لژاندر است.

$$P_n(\omega), \quad P_0(\omega) = 1, \quad P_1(\omega) = \omega, \quad P_2(\omega) = \frac{3\omega^2-1}{2} \quad \cdots \quad P_n(\omega) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\omega^n}\left[(\omega^2-1)^n\right]$$

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta) \qquad \omega = \cos\theta$$

$$(r) \rightarrow r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \xrightarrow{R = r^{\alpha}} \alpha(\alpha-1)r^{\alpha} + 2\alpha r^{\alpha} - n(n+1)r^{\alpha} = 0$$

$$\alpha = n, -(n+1) \longrightarrow R(r) = Ar^{n} + Br^{-(n+1)}$$

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ar^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

این جواب برای همه مسایل کروی می باشد.

برای داخل کره:

$$B_n = 0 \longrightarrow U(a,\theta) = f(\theta)$$

$$U(r,\theta) = \sum A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$U(a,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

مجموعه توابع لژاندر

$$\int_{-1}^{1} P_n(\omega) P_m(\omega)\, d\omega = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

$$f(\theta) = f(\cos^{-1}\omega) = F(\omega)$$

$$F(\omega) = \sum A_n a^n P_n(\omega) \quad , \quad \omega = \cos\theta$$

$$\int_{-1}^{1} F(\omega) P_m(\omega)\, d\omega = A_m a^m \frac{2}{2m+1} \longrightarrow A_m = \frac{2m+1}{2a^m} \int_{-1}^{1} F(\omega) P_m(\omega)\, d\omega$$

$$\text{if } \omega = \cos\theta,\ d\omega = -\sin\theta\, d\theta \longrightarrow A_m = \frac{2m+1}{2a^m} \int_{0}^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta$$

اگر $U(r,\theta,\varphi)$ به سه متغیر φ هم وابسته باشد به توابع لژاندر وابسته می رسیم.

برای خارج کره:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Ar^{n}+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$r\to\infty \longrightarrow u(r,\theta)<\infty \longrightarrow A=0$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$u(a,\theta)=f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{a^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$\omega=\cos\theta \longrightarrow \boxed{\theta=\cos^{-1}\omega} \longrightarrow f(\theta)=f(\cos^{-1}\omega)=F(\omega)$$

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{a^{n+1}}P_n(\omega)$$

از خاصیت متعامد بودن توابع لژاندر استفاده کرده:

$$\int_{-1}^{1}F(\omega)P_n(\omega)\,d\omega=\frac{B_n}{a^{n+1}}\left(\frac{2}{2n+1}\right) \longrightarrow B_n=\frac{(2n+1)a^{n+1}}{2}\int_{-1}^{1}F(\omega)P_n(\omega)\,d\omega$$

بنابراین پاسخ خارجی معادله لاپلاس

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\ ,\quad B_n=\frac{2n+1}{2}a^{n+1}\int_{-1}^{1}F(\omega)P_n(\omega)\,d\omega$$

$$B_n=\frac{2n+1}{2}a^{n+1}\int_{-1}^{1}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \qquad \omega=\cos\theta$$

* ثابت کنید $u=\frac{1}{r}$ در معادله دیفرانسیل لاپلاس سه بعدی بدون داشتن شرایط اولیه و مرزی صدق می کند!

$$r=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{1/2}$$

مطلوبست حل معادله لاپلاس در مختصات سه بعدی کروی با : $f(\theta)=\cos 2\theta$, $a=R=1,\ U=u(r,\theta)$

(منظور جواب داخلی است)

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad , \quad P_n(\omega)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\omega^n}\left[(\omega^2-1)^n\right]$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\omega^2-1 \quad , \quad \omega=\cos\theta$$

$$f(\theta)=\cos 2\theta=\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = 2\cos^2\theta-1 =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\omega) = 2\omega^2-1$$

$$P_0(\omega)=1,\quad P_1(\omega)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2-1\right]=\omega \quad , \quad P_2(\omega)=\frac{1}{2^2\times 2!}\frac{d^2}{d\omega^2}\left[(\omega^2-1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{8}(12\omega^2-4)$$

$$=\frac{1}{2}(3\omega^2-1)$$

$$\rightarrow \omega^2=\frac{2P_2(\omega)+1}{3}$$

$$\Rightarrow 2\left[\frac{2P_2(\omega)+1}{3}\right]-1=\sum_{n=0}^{\infty}A_n P_n(\omega)$$

$$\frac{4}{3}P_2(\omega)+\frac{2}{3}-1=\sum_{n=0}^{\infty}A_n P_n(\omega)$$

$$\frac{4}{3}P_2(\omega)-\frac{P_0(\omega)}{3}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n P_n(\omega), \qquad A_0=-\frac{1}{3}$$

$$A_1=0$$

$$A_2=\frac{4}{3} \quad , \quad A_3=A_4=\dots=0$$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos(\theta))=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\omega)$$

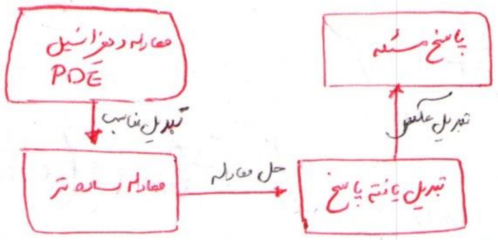
$$U(r,\theta)=A_0P_0(\omega)+A_2r^2P_2(\omega)$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{4}{3}r^2\left(\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\right)=\underbrace{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}r^2+2r^2\omega^2}_{=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}r^2+2r^2\cos^2\theta} \quad , \omega=\cos\theta$$

هفته آینده کوئیز شنبه 3-7

صفحه 52	مرجع	تاریخ	عنوان

حل معادلات به روش تبدیلی



1- f(t) بدین شرط ... پیوسته

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\,ds$$ از طریق تبدیل لاپلاس معکوس حل می‌شود

شرط لاپلاس عکس

$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

$\lim_{s \to \infty} sF(s)$ is finite

Example:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st}\,dt = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-st}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} u e^{-st}\,dt = \frac{\partial}{\partial x} U(x,s)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ $\rightarrow$ $\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{d^2 U}{dx^2} - sU + u(x,0) = 0$

$u(0,t) = 1$ $\rightarrow$ $\mathcal{L}[u(0,t)] = \mathcal{L}[1] \rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s}$

$u(1,t) = 1$ $\rightarrow$ $\mathcal{L}[u(1,t)] = \mathcal{L}[1] \rightarrow U(1,s) = \frac{1}{s}$

$u(x,0) = 1 + \sin \pi x$

$\mathcal{L}[u(x,0)] = \mathcal{L}[1 + \sin \pi x] \rightarrow u(x,0) = 1 + \sin \pi x$

مرحله تبدیل شده معادله به شکل زیر

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - sU = -u(x,0) = -(1 + \sin \pi x)$$

$U(0,s) = \frac{1}{s}$

$U(1,s) = \frac{1}{s}$

این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی است

$$U(x,s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x} + \left(\frac{1}{s} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2 + s}\right)$$

با اعمال شرایط مرزی

$$\to U(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{\sin \pi x}{s+\pi^2} \longrightarrow u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[U(x,s)\right] = 1 + \sin(\pi x)\, e^{-\pi^2 t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\sin \pi x$$

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = s^2 U - s\,u(x,0) - u'(x,0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2 U = -s\sin \pi x + \sin \pi x$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2 U = (1-s)\sin \pi x$$

$$U(0,s) = U(1,s) = 0$$

$$U(x,s) = Ae^{sx} + Be^{-sx} + \frac{s-1}{s^2+\pi^2}\sin \pi x$$

با بکارگیری شرایط مرزی $A=B=0$ می‌شود.

$$U(x,s) = \frac{s-1}{s^2+\pi^2}\sin \pi x \longrightarrow u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[U(x,s)\right] = \sin \pi x\left[\cos \pi t - \frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 1$$

$$u(x,0) = 0$$

By laplace transform

$$\frac{d^2U}{dx^2} = sU - u(x,0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} - sU = 0 \\ U(0,s) = U(1,s) = 1/s \end{cases} \to$$

$$U(x,s) = A\cosh\sqrt{s}\,x + B\sinh\sqrt{s}\,x$$

$$U(0,s) = \frac{1}{s} \to A\cosh 0 + B\sinh 0 = \frac{1}{s} \to A = \frac{1}{s}$$

$$U(1,s) = \frac{1}{s} \to \frac{1}{s}\cosh\sqrt{s} + B\sinh\sqrt{s} = \frac{1}{s} \to B = \frac{1}{s}\left[1 - \cosh\sqrt{s}\right] / \sinh\sqrt{s}$$

$$\longrightarrow U(x,s) = \frac{\sinh\sqrt{s}\,x + \sinh\sqrt{s}(1-x)}{s\sinh\sqrt{s}}$$

برای گرفتن تبدیل لاپلاس این را با استفاده از تجزیه کسرها ساده می‌کنیم

$$s\sinh\sqrt{s} = 0 \longrightarrow s = 0,$$

$$\sinh\sqrt{s} = 0 \longrightarrow \frac{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0 \rightarrow e^{\sqrt{s}} = e^{-\sqrt{s}} \rightarrow e^{2\sqrt{s}} = 1 = e^{i2\pi n} = \cos 2\pi n + i\sin 2\pi n$$

$$\longrightarrow 2\sqrt{s} = i2\pi n \rightarrow \sqrt{s} = in\pi, \quad s = -n^2\pi^2$$

$$P_n = 0, -\pi^2, -4\pi^2, \dots -n^2\pi^2 \longrightarrow$$ قطب‌ها ساده‌اند.

$$U(x,s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-P_1} + \dots + \frac{A_n}{s-P_n} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot s \Big| = x + (1-x) = 1$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sinh\sqrt{s}\,x + \sinh\sqrt{s}(1-x)}{\sinh\sqrt{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x}}{2} + \frac{e^{\sqrt{s}(1-x)} - e^{-\sqrt{s}(1-x)}}{2}}{\frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2}}$$

$$\frac{\frac{x}{2\sqrt{s}}\cosh\sqrt{s}\,x + \frac{(1-x)}{2\sqrt{s}}\cosh\sqrt{s}(1-x)}{\frac{1}{2\sqrt{s}}\cosh\sqrt{s}} \qquad s \to 0$$

$\vdots$

$$A_n = \lim_{s\to P_n} (s-P_n)\frac{P(s)}{Q(s)}\Big|_{s=P_n} = \frac{P(s)}{Q'(s)}\Big|_{s=P_n}$$

$$A_n = \frac{\sinh\sqrt{s}\,x + \sinh\sqrt{s}(1-x)}{\sinh\sqrt{s} + s\frac{1}{2\sqrt{s}}\cosh\sqrt{s}}\Bigg|_{s=-n^2\pi^2} = \frac{\sinh in\pi x + \sinh[in\pi(1-x)]}{\frac{in\pi}{2}\cosh in\pi}$$

$$\cosh in\pi = \frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{2} = \frac{\cos n\pi - i\sin n\pi + \cos n\pi + i\sin n\pi}{2} = \cos n\pi$$

$$\sinh in\pi x = \frac{e^{+in\pi x} - e^{-in\pi x}}{2} = \frac{\cos n\pi x + i\sin n\pi x - \cos n\pi x + i\sin n\pi x}{2} = i\sin n\pi x$$

$$\sinh in\pi(1-x) = i\sin n\pi(1-x)$$

$$A_n = \frac{\sin n\pi x + \sin n\pi(1-x)}{\frac{\pi n}{2}\cos n\pi}$$

$$u(x,t) = A_0 + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + \dots = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x + \sin n\pi(1-x)}{\dots} e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t\geq 0$$

$$u(0,t) = 1$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

$$s\,U(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} - s\,U(x,s) = 0$$

$$\rightarrow m^2 - s = 0 \,, \quad m = \pm\sqrt{s}$$

$$U(x,s) = C_1 e^{-\sqrt{s}x} + C_2 e^{\sqrt{s}x}$$

اعمال شرایط مرزی و فیزیکی:

$$u(0,t) = 1 \rightarrow \mathcal{L}[u(0,t)] = \mathcal{L}[1] \rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s}$$

$$x \to \infty \rightarrow U(x,s) < \infty \longrightarrow C_2 = 0$$

$$U(0,s) = \frac{1}{s} = C_1 \longrightarrow U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[U(x,s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x}\right] \rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

Find the Solution of

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u$$

$$u(x,0) = 6e^{-3x} \qquad x>0,\ t>0.$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u\right] \Rightarrow \frac{d}{dx}U(x,s) = 2\left[sU(x,s) - u(x,0)\right] + U(x,s)$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dx} - (2s+1)U = -2u(x,0) = -12e^{-3x}$$

$$e^{-(2s+1)x} = e^{\int -(2s+1)dx}$$ طرفین رابطه را در فاکتور انتگرال‌گیر ضرب

$$\rightarrow e^{-(2s+1)x}\frac{dU}{dx} - (2s+1)e^{-(2s+1)x}U = 6e^{-3x}\cdot e^{-(2s+1)x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(Ue^{-(2s+1)x}\right) = -12e^{-(2s+4)x}$$

$$U(x,s) = \frac{1}{e^{-(2s+1)x}}\times\int -12e^{-(2s+4)x}\,dx$$

$$U(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + ce^{(2s+1)x}$$

$$x\to\infty \Rightarrow U(x,s) < \infty \longrightarrow c=0 \longrightarrow U(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

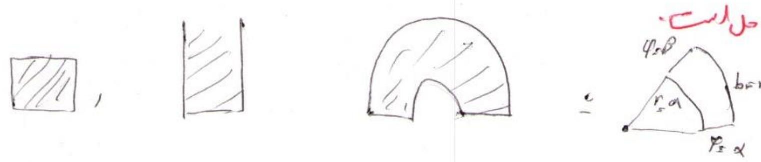
$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[U(x,s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s+2}e^{-3x}\right] = 6e^{-2t-3x}$$

* روش کلی برای حل همه معادلات PDE وجود ندارد.

* روش جداسازی متغیرها مرسوم‌ترین روش حل PDE می‌باشد. البته برای هر معادله‌ای هم نمی‌توان بکار برد.

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

* در همه ناحیه‌ها مسئله قابل حل نیست، به طور خلاصه در ناحیه‌های مستطیلی و مستطیل تعمیم یافته مسئله قابل حل است.



نکته: اگر معادله دیفرانسیل به فرم

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بعد ضرایب آن ثابت باشند، فرض می‌شود که پاسخ معادله به صورت $u=f(y+mx)$ باشد، در این صورت

معادله مشخصه دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$am^2f'' + bmf'' + cf'' = 0 \longrightarrow am^2+bm+c=0$$

که از حل این معادله m_1 و m_2 بدست می‌آید

$$u = f(y+m_1x) + g(y+m_2x)$$

$$\begin{cases} y+m_1x = c_1 \\ y+m_2x = c_2 \end{cases} \longrightarrow \text{charecteristics} \longrightarrow \text{منحنی‌های مشخصه معادله}$$

در واقع $\begin{cases} v=y+m_1x \\ w=y+m_2x \end{cases}$ تغییر متغیرهای مناسبی هستند که فرم اولیه معادله را ساده می‌کنند.

if $m_1 \neq m_2 \rightarrow \begin{matrix} y+m_1x \\ y+m_2x \end{matrix} \rightarrow$ مشخصه‌ها رسم دارند

انتخاب می‌شود

if $a=0 \longrightarrow u = f(x+my) \Rightarrow u = f(x) + g(x+my)$

if $m_1 = m_2 \longrightarrow u = f(y+m_1x) + x\,g(y+m_2x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \longrightarrow m^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \longrightarrow m = \pm\frac{1}{c}$$

$$u = f(t+\tfrac{1}{c}x) + g(t-\tfrac{1}{c}x)$$

$$u = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$\rightarrow z = f(y+mx) \rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \longrightarrow m = 1, 2$

$$z = z_1(y+x) + z_2(y+2x)$$

if $v = y+x$, $w = y+2x \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial w} = 0 \rightarrow z = f(v) + f(w)$

معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad 0<x<l$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -h\, U(l,t) \;\text{ یا }\; \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)_{x=l} = 0$$

$$U(x,0) = f(x)$$

Using the Separation of variables:

$$u(x,t) = X_{(x)} G_{(t)} \xrightarrow{\text{in eq.}} X'' G = \frac{1}{k}\dot{G} X \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{\dot{G}}{G} = \begin{cases} 0 \\ -\alpha^2 \\ +\alpha^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow X'' + \alpha^2 X = 0 \rightarrow X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

$$X'(x) = -\alpha A\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$$

$$U_x = X'_{(x)} G_{(t)} \rightarrow U_x(0,t) = X'_{(0)} G(t) = 0 \rightarrow X'_{(0)} = 0$$

$$\rightarrow X'(0) = 0 \rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\alpha x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow X'G + hXG = 0 = G[X' + hX] = 0$$

که جواب بدیهی است $u=0$ زیرا اگر صفر شود $\xrightarrow{G\neq 0}$ $\left. X' + hX\right|_{x=l} = 0$

$$\rightarrow \left.\left[-A\alpha\sin\alpha x + hA\cos\alpha x\right]\right|_{x=l} = 0$$

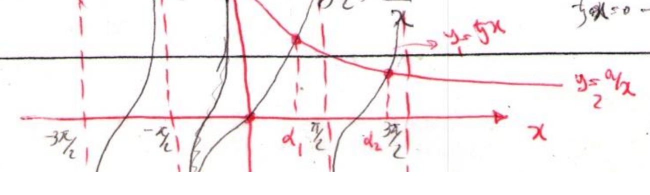
$$\rightarrow \left.\alpha\sin\alpha x\right|_{x=l} = \left. h\cos\alpha x\right|_{x=l} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha l = \frac{h}{\alpha} = \frac{hl}{\alpha l}$$

از حل معادله α بدست می‌آید

$$\operatorname{tg} x = \frac{c}{x} \rightarrow y_1 = \operatorname{tg} x$$

زیرا نمودار

$$\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x = k\pi$$



α_1 و α_2 و ... α_n ریشه‌های معادله‌اند

$$X(x) = A\cos\alpha_n x$$

$$\dot{G} + k\alpha_n^2 G = 0 \longrightarrow G(t) = C\,e^{-k\alpha_n^2 t} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} D_n \cos\alpha_n x\, e^{-k\alpha_n^2 t}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{1}^{\infty} D_n \cos\alpha_n x$$

درصورتیکه مجموعه $\cos\alpha_n x$ ها متعامد باشند می‌توان D_n ها را بدست آورد.

مسئله مقدار مرزی اشتورم-لیوویل Sturm-liouville

$$[r(x)X'(x)]' + [q(x) + \lambda p(x)]X(x) = 0 \qquad a < x < b$$

Where the functions p, q and r are independent of λ.

P, q, r, r' are real-valued functions of the real variable x

Which are Continuous on the closed bounded interval

$a \le x \le b$ and $p(x) > 0$ and $r(x) > 0$

$X(x)$ is required to satisfy the homogeneous B.C.

$$a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0$$

$$b_1 X(b) + b_2 X'(b_2)$$

که a_1, a_2 همزمان صفر نیستند و b_1, b_2 نیز همزمان صفر نیست.

★ مسائلی که از جداسازی متغیرها به دست می‌آیند حالت خاصی از معادله بالا هستند.

خواص پاسخ‌های معادله اشتورم لیوویل:

- مقادیری از λ که مسئله مقدار مرزی اشتورم لیوویل را دارای پاسخ غیربدیهی می‌کند مقادیر ویژه (eigenvalue) گویند

و پاسخ غیربدیهی معادله اشتورم لیوویل را تابع ویژه گویند eigenfunct

- مقادیر ویژه λ_n همه حقیقی بوده و یک کران پایین داشته و کران بالا ندارند

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$

$$\begin{cases} \lambda_n \to \infty \\ n \to \infty \end{cases}$$

- توابع ویژه u_m و u_n متناظر با λ_m (مقادیر ویژه) و λ_n متفاوت، تشکیل یک مجموعه متعامد می‌دهند که تابع وزن ~~متعامد~~ $P(x)$ می‌باشد، تشکیل یک مجموعه کامل را می‌دهند.
- توابع ویژه u_n متناظر با مقدار ویژه λ_n یکتا است.

معادله موج زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = A$$

$$u(l,t) = B$$

$$u(x,t) = W(x,t) + V(x)$$

$$V(x) \xrightarrow{\text{پاسخ پایدار}} \begin{cases} c^2 \frac{dV(x)}{dx} + F(x) = 0 \\ V(0) = A \\ V(l) = B \end{cases}$$

$$W(x,t) = u(x,t) - V(x)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$W(x,0) = f(x) - V(x) = h(x)$$

$$W_t(x,0) = u_t(x,0) = g(x)$$

$$W(0,t) = u(0,t) - V(0) = A - A = 0$$

در مسئله با حالت ناهمگن تبدیل شده حل آن را نداریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

روش بسط برحسب توابع ویژه:

۱- اول معادله همگن را در نظر گرفته و حل می‌کنیم تا توابع ویژه به دست آید.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\} \xrightarrow{S.O.V} \quad u_n = \sin\frac{n\pi}{l}x$$

حال $u(x,t)$ و $h(x,t)$ را برحسب توابع ویژه بسط می‌دهیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

حال مشتقات u نسبت به tt و xx گرفته و به همراه h در معادله اولیه قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ u'' \sin\frac{n\pi x}{l} + \left[c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{l}x\right] u_n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_n'' + \left(\frac{n\pi c}{l}\right) u_n = h_n(t)$$

در حالت کلی می‌توان از این روش برای حل معادله کلی که به شرایط مرزی غیرهمگن نیز استفاده کرد