بسمه تعالی

دانشگاه سمنان

دانشکده مهندسی مکانیک

دست نوشته های درس

"ریاضی مهندسی"

مدرس:

دکتر محمد صادق ولی پور

اردیبهشت ماه ۱۳۹۹

صفحه | مرجع | تاریخ | عنوان: Complex Numbers & Functions

اعداد و توابع مختلط

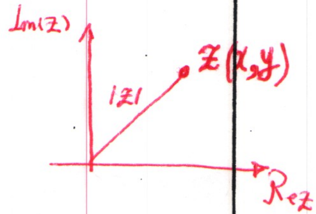
$$x^2+1=0 \longrightarrow x^2=-1$$

$$x^2-10x+40=0$$

این توابع معادلات پاسخ حقیقی ندارند

لذا عدد مختلط (Complex Number) Z را به صورت زیر که از اعداد حقیقی x و y تشکیل شده است را تعریف کردند.

$Z = x+iy$ or $Z=(x,y)$ مجموعه اعداد مختلط را به صورت زوج مرتب نمایش می‌دهند.



x = real part of Z = $\operatorname{Re} z$ قسمت حقیقی =

y = Imaginary part of Z = $\operatorname{Im} Z$ قسمت موهومی

یعنی در حقیقت ما به هر نقطه از صفحه یک عدد مختلط نسبت داده‌ایم، نتیجتاً مجموعه نقاط یک صفحه تشکیل مجموعه اعداد مختلط را می‌دهند.

نکته: دو عدد مختلط مساوی‌اند اگر و تنها اگر قسمت‌های حقیقی آنها با هم و قسمت‌های مجازی آنها نیز با هم برابر باشند.

$$Z_1 = x_1+iy_1, \quad Z_2 = x_2+iy_2 \longrightarrow Z_1=Z_2 \text{ if and only if } \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$$

if $x=0,\ y=1$ (i.e. $Z=i=(0,1)$

به $i=(0,1) \in$ واحد مجازی "Imaginary unit" گویند.

$i \cdot i = i^2 = (0,-1)$

خاصیت ضرب و جمع اعداد مختلط.

Addition of two Complex numbers $z_1=(x_1,y_1)$ and $z_2=(x_2,y_2)$ is defined by:

$$z_1+z_2 = x_1+iy_1+x_2+iy_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$= (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

Multiplication is defined by:

$$z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

if $x=0 \rightarrow z=iy \rightarrow$ is Called Pure imaginary

$$i^2=ii=(0,1)(0,1) = (0-1,\ 0) = (-1,0)$$

$$i^2=-1$$

بنابراین

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \Rightarrow x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2$$

$$= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

تعریف تقسیم اعداد مختلط.

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2) = (x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \rightarrow Z_1 = Z Z_2 \rightarrow (x_1 + iy_1) = (x + iy)(x_2 + iy_2)$$

$$\rightarrow (x_1 + iy_1) = (x x_2 - y y_2) + i(x y_2 + x_2 y)$$

$$x_1 = x x_2 - y y_2$$

$$y_1 = x y_2 - x_2 y$$

$$\rightarrow x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$Z = x + iy = \frac{Z_1}{Z_2}$$

در عمل صورت و مخرج کسر را در عکس [illegible] $\bar{Z}_2 = x_2 - iy_2$ ضرب می‌کنیم

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال:

$$Z_1 = 8 + 3i$$

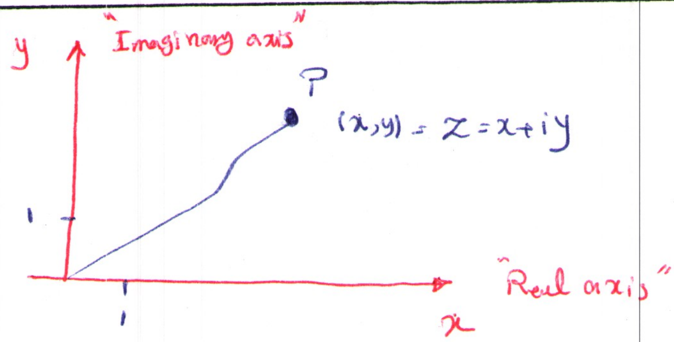
$$Z_2 = 9 - 2i$$

$$Z_1 - Z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{8+3i}{9-2i} \times \frac{9+2i}{9+2i} = \frac{66+43i}{81+4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85} i$$

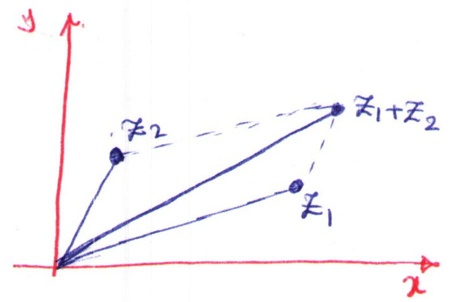
Complex Plane:

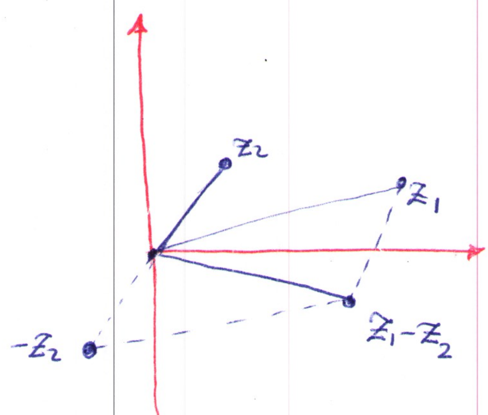
The geometrical representation of Complex numbers as Points in the plane.



قطعه‌ها به صورت محورهایی در نقطه آغاز گرفته می‌شوند.

به مختصات xy که در آن اعداد مختلط $z=x+iy$ ترسیم شوند، مختصات مختلط گویند.

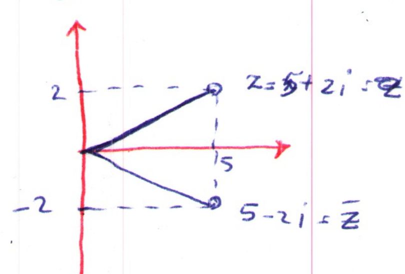




مزدوج مختلط: Complex Conjugate Numbers

$\bar{z}$ = the Complex Conjugate of z = $x - iy$

$z = 5+2i \longrightarrow \bar{z} = 5-2i$



$$z+\bar{z} = x+iy+x-iy = 2x \longrightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}\, z$$

$$z-\bar{z} = x+iy-(x-iy) = 2iy \longrightarrow y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \mathrm{Im}\, z$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

if z is real $\longleftrightarrow$ $\bar{z} = z$

if z is pure imaginary $\longleftrightarrow$ $\bar{z} = -z$

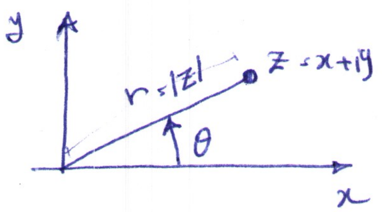
$\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

$\overline{(z_1-z_2)} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Polar form of Complex Numbers, Powers and Roots



in Polar system: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

The Polar form of z is:

$$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

r: absolute value or modulus (نرم) of z, is denoted by $|z|$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

از نظر هندسی $|z|$: فاصله نقطه مختلط z از مبداء مختصات است.

θ: The argument of z

$$\theta = \arg z = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

θ: برحسب رادیان بوده در جهت خلاف عقربه‌های ساعت مثبت در نظر گرفته شود

$z = 0 \longrightarrow \theta$ is undefined.

$z \neq 0 \longrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

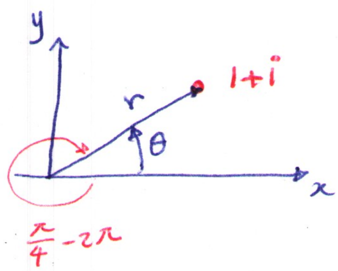
چون Sin و Cos، توابع متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشند لذا برای هر z زاویه‌های مختلفی بدست می‌آید

$\arg z = \theta$

$\operatorname{Arg} z$ = principal value =   مقدار اصلی $-\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$

$\arg z = \operatorname{Arg} z \pm 2n\pi \quad , n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Example: $\quad z = 1 + i$



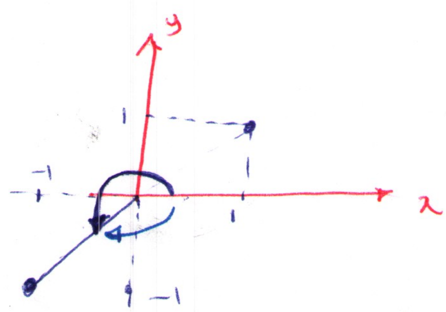
$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi \ (n = 0, 1, \ldots)$

$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$ "principle value"

دقت شود

$z = -1 - i \longrightarrow r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$



$\theta = \arg = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \tan^{-1} 1 \overset{??}{=} \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arg} z = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\operatorname{Arg} z = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$\arg = \frac{5\pi}{4} \pm 2n\pi$

$\arg z = -\frac{3\pi}{4} \pm 2n\pi$

Prove the Triangle Inequality:

$$|z|^2 = (Re\,z)^2 + (Im\,z)^2 \rightarrow \begin{cases} Re\,z \leq |Re\,z| \leq |z| \\ Im\,z \leq |Im\,z| \leq |z| \end{cases}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|z_1 + z_2| \overset{?}{\leq} |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + |z_2|^2 \qquad (I)$$

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\,Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2| \qquad (II)$$

$$I, II \longrightarrow |z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$\leq [|z_1| + |z_2|]^2$$

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1+z_2| \overset{?}{\geq} \big||z_1|-|z_2|\big|$$ نشان دهید

$$|z_1| = |(z_1+z_2) + (-z_2)| \leq |z_1+z_2| + |-z_2|$$

$$|z_1| \leq |z_1+z_2| + |z_2| \rightarrow |z_1+z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

if $|z_1| \geq |z_2| \longrightarrow |z_1+z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ (1)

if $|z_1| \leq |z_2| \longrightarrow |z_1+z_2| \geq |z_2| - |z_1|$ or $|z+z_2| \geq -(|z_1$

$$|z_1+z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$$

in Triangle inequality: if we change z_2 by $-z_2$

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| \longrightarrow |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

$$|(z_1+z_2)+z_3| \leqslant |z_1+z_2|+|z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|$$

$$|(z_1+z_2+\dots z_{n-1})+z_n| \leqslant |z_1+z_2+\dots+z_{n-1}|+|z_n| \leqslant |z_1+z_2+\dots+z_{n-2}|+|z_{n-1}|+|z_n|$$

$$\dots \qquad \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|+\dots+|z_n|$$

$$|z_1+z_2+z_3+\dots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$

$$\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leqslant \frac{|z_1|+|z_2|}{\big||z_3|-|z_4|\big|}$$

$$|z-z_0|=R \longrightarrow |z|^2-2R_e(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2$$

$$|z-z_0|^2=(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$$

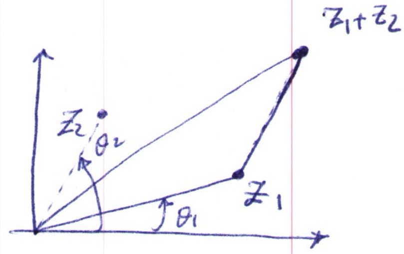
$$z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0 z+z_0\bar{z}_0=R^2$$

$$|z|^2-(\overline{\bar{z}_0 z}+\bar{z}_0 z)+|z_0|^2=R^2$$

$$|z|^2-2R_e(\bar{z}_0 z)+|z_0|^2=R^2 \therefore$$

Triangle Inequality　　　　نامساوی مثلثی:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$



نقاط 0 ، z_1 , z_1+z_2 رأس‌های یک مثلث می‌باشند که اضلاع آن

$|z_1|$ ، $|z_1+z_2|$ و $|z_2|$ می‌باشد. که یک ضلع نمی‌تواند از مجموع دو ضلع دیگر بزرگتر باشد.

the generalized triangle inequality

$$|z_1+z_2+\dots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$

Example: $z_1=1+i$, $z_2=-2+3i$

$$|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \qquad |z_2|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$z_1+z_2=1+i-2+3i=-1+4i \rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$$\sqrt{17}=4.123 < \sqrt{2}+\sqrt{13}=5.020$$

Multiplication and Division in Polar Form

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2=r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad , \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \times \frac{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

یا می‌توان نوشت:

$$z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 \rightarrow |z_1| = \left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$$

$$\rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg z_1 = \arg\left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2\right] = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg z_2$$

$$\rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Example:

$z_1 = -2 + 2i$

$z_2 = 3i$

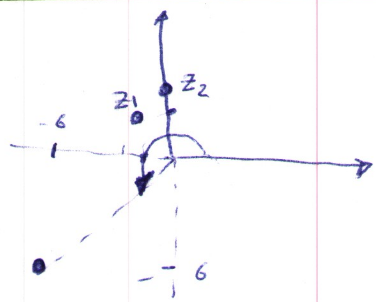
$$\rightarrow z_3 = z_1 z_2 = 3i(-2+2i) = -6i - 6 = z_3$$

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+2i}{3i} \times \frac{i}{i} = \frac{-2i-2}{-3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$|z_2| = 3 \quad , \quad \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$|z_3| = |z_1||z_2| = 3\sqrt{8} = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$$



$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{4}$$

چون باید $-\pi \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ لذا

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \pi + \frac{\pi}{4} - 2\pi = \boxed{-\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2\pi$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_4 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\cancel{8}\pi}{\cancel{4}} = \frac{+\pi}{4}$$

if $z_1 = z_2 = z \longrightarrow z_3 = z_1 z_2 = z \cdot z = z^2$

$$|z_3| = |z^2| = \cancel{\theta^2}\, |z||z| = |z|^2 = r^2$$

$$\arg(z^2) = \operatorname{Arg} z + \arg z = 2 \arg z$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

De Moivre's Formula $\longrightarrow$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

فرمول دموآور

Roots:

$$z = w^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

for each value of w $\longrightarrow$ only one value of z

for a given $z \neq 0$ $\longrightarrow$ n distinct values of w

که به هر مقدار از w گوییم ریشه n ام z

$W = \sqrt[n]{z}$ $\longrightarrow$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}; \quad w = R(\cos\phi + i\sin\phi) = Re^{i\phi}$$

$$\rightarrow W^n = R^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = z$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rightarrow r = R^n \rightarrow R = \sqrt[n]{r}$$

$$\rightarrow n\phi = \theta + 2k\pi \rightarrow \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots n-1$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

n مقدار دارد که برابر n مقدار $\sqrt[n]{z}$ روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ واقع شده‌اند.

Example:

$$\text{if } z = 1 \rightarrow \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

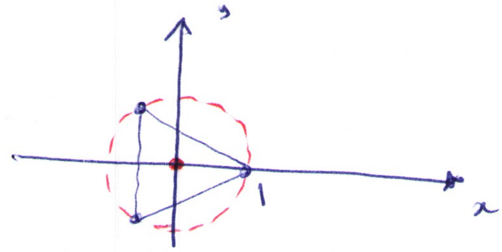
$|z| = r = 1$

$\theta = 0$

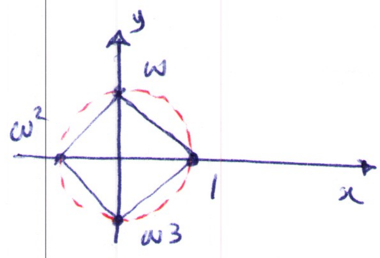
$$\sqrt[3]{1} = 1, -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i,$$

$$\sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i,$$

اینها نقاطی هستند روی دایره‌ای به مرکز مبدا و به شعاع ۱



$\sqrt[3]{1}$



$\sqrt[4]{1}$

if ω denotes the value for $k=1$ ✓

then the n values of $\sqrt[n]{1}$ can be

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \dots,\ \omega^{n-1}$$

$$w = \sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

$k=0 \rightarrow W_1 = -1 \qquad , \quad -1$

$K=1 \rightarrow W_2 = i \qquad , \quad \omega = i$

$K=3 \rightarrow W_3 = -i \qquad , \quad \omega^3 = i \times i \times i = -i$

$k=4 \rightarrow W_4 = +1 \qquad , \quad W^2 = i$

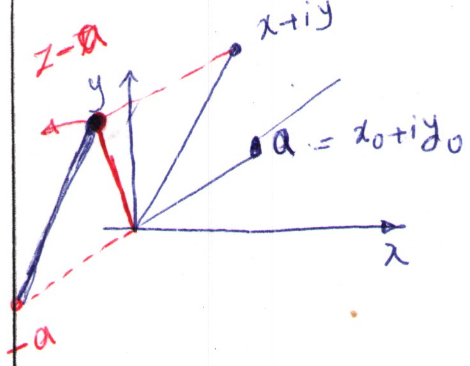
بطور کلی اگر w_1 یکی از n ریشه عدد مختلط دلخواه $z \neq 0$ باشد آنگاه n ریشه $\sqrt[n]{z}$ بصورت زیر خواهد بود

$$w_1,\ w_1\omega,\ w_1\omega^2,\ \dots,\ w_1\omega^{n-1}$$

چون اگر w_1 را در ω^k ضرب کنیم بطور واقع زاویه باندازه $\frac{2k\pi}{n}$ افزایش یافته است.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

تعریف نواحی در صفحه مختلط.



$$|z-a| = \rho$$

یعنی بیانگر مجموعه نقاطی است که از نقطه a به یک اندازه اند

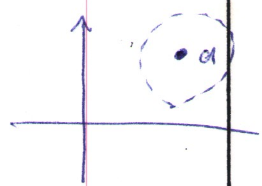
که معادله دایره‌ای است به مرکز a و شعاع ρ

$$|z-a| = \rho \rightarrow \left|(x+iy) - (x_0+iy_0)\right| = R$$

$$\left|(x-x_0) + i(y-y_0)\right| = R$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$



یعنی دایره‌ای است به مرکز (x_0, y_0) به شعاع R

For interior (open circular disk) $|z-a| < \rho$

" " (closed circular disk) $|z-a| \leq \rho$

For exterior $|z-a| > \rho$

به مجموعه نقاط $|z-a| < \rho$ گوییم همسایگی نقطه a به شعاع ρ

$\rho_1 < |z-a| < \rho_2$: { open annulus / open circular ring

$\rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2$ { closed annulus / closed circular ring

Half plane

set of all point $z = x + iy$

$$\begin{cases} y>0 \rightarrow \text{upper half plane} \\ y<0 \rightarrow \text{lower half plane} \\ x>0 \rightarrow \text{right half plane} \\ x<0 \rightarrow \text{left half plane} \end{cases}$$

$Re(z) \leq 1 = x \leq 1$

$Re(z^2+z) \leq 1 \rightarrow Re\left[(x^2-y^2+2ixy+(x+iy)\right] \leq 1$

$= x^2 - y^2 + x \leq 1$ → یک ناحیه هذلولی است

مجموعه نقاط: Set of Points : به اجتماع نقاط در یک صفحه گویند

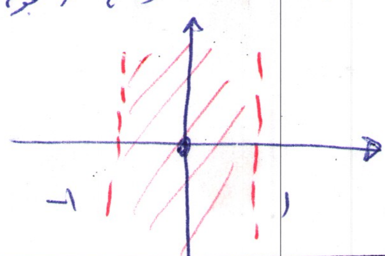
۱- مجموعه کراندار و متناهی . "bounded" مجموعه‌ای از نقاط که بتوان در یک دایره‌ای به شعاع مشخص جای داد

$-1 \leq Re\,z \leq 1 \rightarrow$ مجموعه متناهی است

۲- مجموعه باز: open set ← هر نقطه از مجموعه یک همسایگی است که باز هم در مجموعه است.

$-1 < Re\,z < 1$

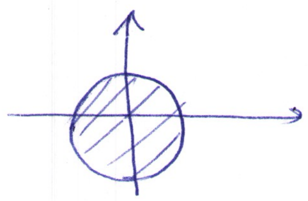
مجموعه باز



صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

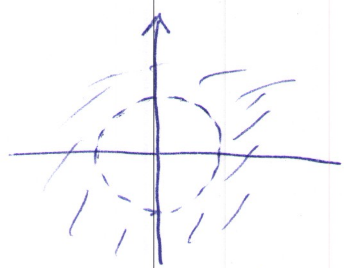
۳- مجموعه بسته یا مکمل (Complement) ← مجموعه ای است که مکمل آن در صفحه یک مجموعه باز است.

A set S is called closed if its complement is open.



$|z| \leq 1$

closed set



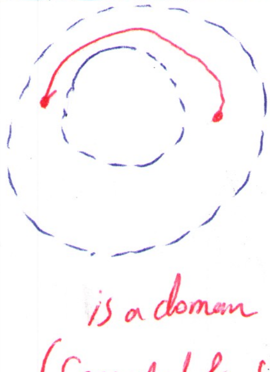
$|z| > 1$

open set

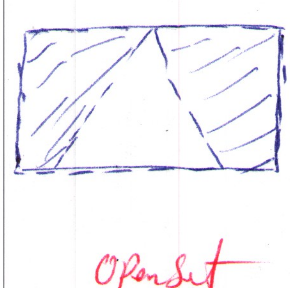
۴- همبند Connected ← پیوسته ← همبند

A set $\underline{\underline{S}}$ is called connected if any two of its point can be jointed by a broken line of finitely many straight-line segments all of whose points belongs to S.

An open and connected set is called domain.



is a domain (Connected & open set).



Open set but not Connected.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

boundary Points,

A boundary Points of a set S is a point every neighborhood of which contains both points that belong to S and points that do not belong to S.

region: is a set consisting of a ~~تابع مختلط~~ domain plus, ~~...~~ some or all of its Boundary points

Complex Function

- هر که مقدار آن عدد مختلط و برد آن نیز عدد مختلط باشد تابع یا متغیر مختلط یا تابع مختلط گویند.

فرض می‌کنیم مجموعه اعداد مختلط S در صفحه داده شده باشد، منظور از تابع f روی S دستوری است که به هر عدد مختلط (Z) از S یک عدد یکتای W را نسبت دهد و می‌نویسیم

$W = f(Z)$ For example, $W = Z + Z^2$

W: مقدار تابع به ازای Z

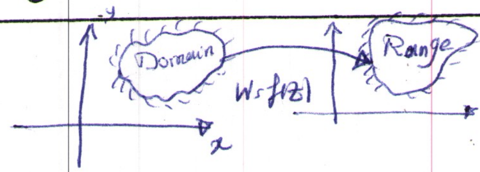
Z: Complex Variable

S: the domain of f or Domain. (usually open and connected)

The set of all values of a function f is called the range of f

16

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان



$W = f(z)$

W is Complex $= u + iv$, Z is Complex: $x + iy$

$$W = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$W = f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

u , v : توابع حقیقی هستند.

let $W = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$

$$f(z) = 2i(x+iy) + 6(x-iy)$$

$$= 2ix - 2y + 6x - i6y = 6x - 2y + i(2x - 6y)$$

$$u(x,y) = 6x - 2y \quad , \quad v(x,y) = 2x - 6y$$

for $z = \frac{1}{2} + 4i \rightarrow f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = \left(\overset{3}{\frac{6\times 1}{2}} \overset{-8}{- 2\times 4}\right) + i\left(\frac{1}{2}\times 2 - 4\times 6\right)$

$$= -5 - 23i$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right)$$

حد یک تابع: می‌گوئیم حد تابع $f(z)$ وقتی $z \to z_0$ میل کند L است

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

- اگر f در همسایگی z_0 تعریف شده باشد $(z \neq z_0)$

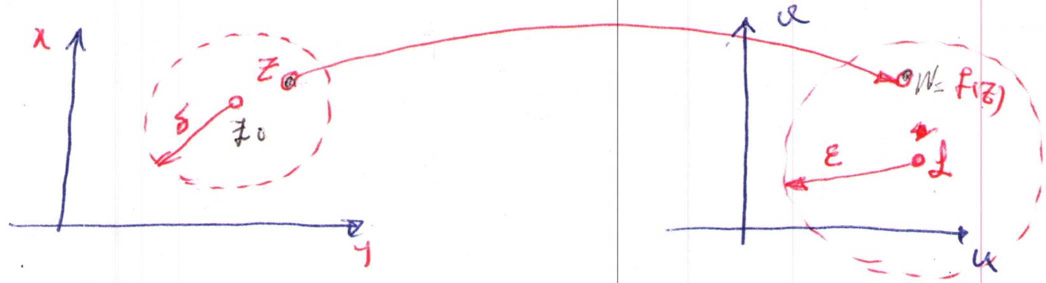
- به ازای هر عدد کوچک ε هر چند دلخواه و البته حقیقی مثبت می‌توان عددی مانند δ (مثبت و حقیقی) پیدا کرد به طوریکه

$$|f(z) - L| < \varepsilon \Leftarrow |z - z_0| < \delta$$

برای

For all $z \neq z_0$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه



برخلاف اعداد حقیقی که حد را از یک سمت به نقطه مورد نظر میل می‌کرد:

در اعداد مختلط وقتی z به سمت z_0 میل می‌کند مطلق جهت دست تغییر می‌کند یعنی این

z از هر جهت دلخواه به سمت z_0 میل می‌کند

خواص توابع پیوسته

if a limit exist it is unique!

1. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ exist

$f(z_0)$ exist.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

پیوستگی:

۱- $f(z)$ در $z = z_0$ تعریف شده

۲- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجود باشد

۳- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته است اگر

!! در هر جهت دلخواه می‌توان به z_0 نزدیک شد معنی پیوستگی معنی ندارد.

۱- اگر $f(z)$ و $g(z)$ در نقطه z_0 پیوسته باشند آنگاه $f(z) \pm g(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است.

۲- اگر $f(z)$ و $g(z)$ در نقطه z_0 پیوسته باشند آنگاه $f(z) \cdot g(z)$ در نقطه z_0 نیز پیوسته است

۳- اگر $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 پیوسته باشند و $g(z_0) \neq 0$ آنگاه $\frac{f(z)}{g(z)}$ در نقطه z_0 پیوسته است

* f(z) is said Continuous in a domain if it is Continuous at each point of this domain!

مشتق پذیری:

تابع $f(z)$ در z_0 دارای مشتق است اگر حد زیر موجود باشد

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

$z \to z_0$ از هر جهت دلخواه نزدیک شود صدق می‌کند!

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$f(z) = z^2$

$$\to f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{z^2+\Delta z^2+2z\Delta z - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} (2z+\Delta z) = 2z$$

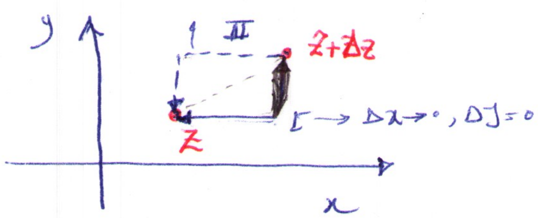
چون محور حقیقی جزو از دستگاه مختصات مختلط است لذا تعاریف مشابهند.

$f(z) = \bar{z} \quad \to$

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{(\overline{z+\Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\bar{z}+\overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} -1 & \Delta x = 0,\ \Delta y \to 0 \\ 1 & \Delta y = 0,\ \Delta x \to 0 \\ \dfrac{1-mi}{1+mi} & \Delta y \propto \Delta x \text{ or } \Delta y = m\Delta x \end{cases}$$

$\Delta x = 0 \quad \Delta y \to 0$



با تعاریف بالا ثابت نیست لذا مشتق ندارد

توابعی مانند $\bar{z}$ $|z|$ $\mathrm{Arg}(z)$ $\mathrm{Re}(z)$ ، $\mathrm{Im}(z)$ مشتق پذیر نمی‌باشند.

★ اگر تابعی مشتق پذیر باشد در یک نقطه، پیوسته هم هست ولی اگر تابعی پیوسته باشد (در آن نقطه) لزوماً مشتق پذیر نیست!

قوانین مشتق که برای توابع حقیقی صادق بودند اینجا نیز استفاده می‌شوند.

$(cf)' = cf' \quad , \quad (f+g)' = f' + g'$

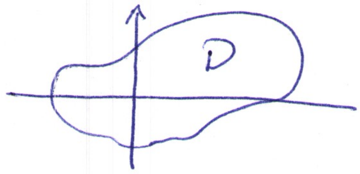
$(fg)' = f'g + g'f \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

قوانین مشتق زنجیره‌ای chain rule نیز صادق است.

$(z^n)' = nz^{n-1}$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

توابع تحلیلی: اگر تابع $f(z)$ در حوزهٔ D (ناحیه باز) تعریف شده باشد و مشتق پذیر باشد گوییم $f(z)$ در D تحلیلی است



$z \xrightarrow{D} f(z)$

Domain Range

گوییم تابع در $z=z_0$ تحلیلی است اگر $f(z)$ در همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

Analytic $\cong$ Holomorphic $\equiv$ Regular

$f(z) = c_0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \dots c_n z^n$ توابع چندجمله‌ای تحلیلی است

$g(z) = \dfrac{c_0}{z-a}$ در همه جا بجز در $z=a$ تحلیلی است.

اگر g در همه جا بجز $z=a$ تحلیلی باشد گوییم $z=a$ نقطهٔ تکین است. Singular Point.

$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$

در همه نقاط بجز $h(z)=0$ تحلیلی است.

$f(z) = \bar{z}$ یک تابع تحلیلی نیست

تحقیق تحلیلی بودن

Cauchy_Riemann Equations

$W = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

f is analytic in a domain D if and only if the first partial derivatives of u and v satisfy the two Cauchy–Riemann equations

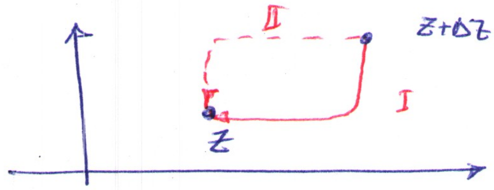
$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه ۱

اگر $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ موجود و پیوسته باشد در همسایگی a از نقطه $z = x+iy$ و مشتق پذیر باشد در z. آنگاه مشتق مرتبه اول u و v در D موجود و در شرایط کوشی - ریمان صدق می‌کند. بالعکس: اگر $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد مشتقات جزئی u و v موجود و در شرایط کوشی ریمان صدق می‌کند. Atonce

اثبات:



معیار تحلیلی بودن در z یعنی $f'(z)$ در z موجود باشد.

$$f'(z) = \lim \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

21

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$F'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\Delta x + i \cancel{\Delta y}_{\,0}}$$

یکبار $\Delta y = 0$ قرار داده و $\Delta x \to 0$ میل می‌دهیم.

$$F'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + i v_x$$ دقت در

$$F'(z) = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{u(x, y+\Delta y) + i v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\cancel{\Delta x}_{\,0} + i \Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i \Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i \Delta y}$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$= -i u_y + v_y$$

شرط مشتق پذیر این است که این حد با هم یکی باشند

$$-i u_y + v_y = u_x + i v_x$$

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$f(z) = Re(z) = x \quad \rightarrow u = x, \; v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow$$

پس کوشی ریمان صدق نمی‌کند لذا تحلیلی نیست.

$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = 2z$

$f(z) = (x^2 - y^2) + i\,(2xy) \quad , u = x^2 - y^2 \quad , v = 2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

پس تحلیلی است. برای مشتق از شرط کوشی ریمان نیز می‌توان استفاده کرد.

$$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \rightarrow f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$

Cauchy-Riemann equation:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad , \; f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

$$f'(z) = \frac{1}{z}(u_\theta + iv_\theta)$$

Note: Satisfaction of the Cauchy-Riemann equation at $z = (x,y)$ is not sufficient to ensure the existence of the derivative of a function $f(z)$ at that point.

But with certain continuity conditions, we have the following useful theorem.

قضیه: اگر توابع پیوسته از متغیرهای حقیقی x و y مانند $u(x,y)$ و $v(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته ~~[illegible]~~ نسبت به x و y در D باشند و در شرایط کوشی - ریمان صدق کنند آنگاه تابع مختلط $u(x,y) + i\,v(x,y)$ در D تحلیلی است. (عکس آن نیز برقرار است، اگر $f(z)$ تحلیلی باشد)

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

برای اثبات قضیه به کتاب Complex variables & application از R.V. Churchill, J.W. Brown و همکاران مراجعه شود.

Laplace's equation, Harmonic Functions.

اهمیت توابع تحلیلی این است که قسمت حقیقی و مجازی آنها در معادله لاپلاس صدق می‌کنند.

قضیه: اگر $f(z) = u + iv$ در ناحیه D تحلیلی باشد، آنگاه u و v در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. یعنی

$$\nabla^2 u = 0$$
$$\nabla^2 v = 0$$

اصطلاحاً گوییم u و v هارمونیک هستند در D.

شرط کوشی - ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

اگر u و v پیوسته باشند و مشتقات ~~[illegible]~~ مرتبه بالاتر هم باشند (برای توابع تحلیلی چنین است)

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

ما قبلاً برای حل معادله لاپلاس را پیدا کردیم

پاسخ ها

$$\sum r^n \cos n\varphi \quad , \quad \sum r^n \sin n\varphi$$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$z = re^{i\varphi} \rightarrow f(z) = a_0 + a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{2i\varphi} + \dots + a_n e^{ni\varphi}$$

$$u(r,\varphi) = R_e(f(z)) = a_0 + a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + \dots$$

$$v(r,z) = I_m(f(z)) = a_0 + a_1 r \sin\varphi + a_2 r^2 \sin 2\varphi + \dots$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow u = f(x+my)$$

$$am^2 + bm + c = 0$$

$$\begin{matrix} b=0 \\ a=1=c \end{matrix} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow m^2 + 1 = 0 \ , \ m = \pm i$$

$$u = f(x+iy) + g(x-iy)$$

تابع هارمونیک

حل معادله لاپلاس که دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد تابع هارمونیک نامیده می‌شود.

بنابراین قسمت های حقیقی و مجازی یک تابع مختلط چون پاسخ معادله لاپلاس هستند هارمونیک هستند

اگر دو تابع حقیقی u و v در شرایط کوشی-ریمان صدق کنند u و v اجزای حقیقی و مجازی یک تابع تحلیلی هستند که به v گویند تابع هارمونیک مزدوج u

$$W = u + iv$$

Example: Verify that $u = x^2 - y^2 - y$ is harmonic in the Whole Complex plane and find a harmonic Conjugate function v of u

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

پس طبق معادله لاپلاس است لذا هارمونیک است.

$$u_x = v_y = 2x \qquad v_x = -u_y = 2y + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \rightarrow v = 2xy + h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dh}{dx} = 2y + 1 \rightarrow \frac{dh}{dx} = 1, \quad h = x + c$$

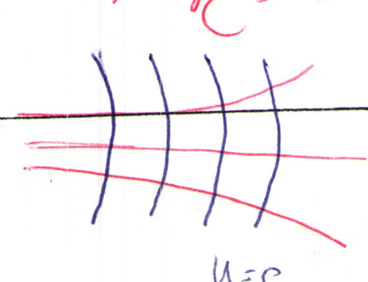
$$v = 2xy + x + C$$

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c)$$

$$= (x^2 - y^2) + i2xy + ix - y + ic$$

$$= z^2 + iz + i\underline{c}$$

نکته: $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را تابع مختلط گویند که اگر $u(x,y) = C_1$ را خطوط هم پتانسیل ~~گویند~~ باشند، $v(x,y) = C_2$ خطوط میدان را باشند.



C_2 Const.

Theorem: A function $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ is analytic in a domain D if and only if v is a harmonic conjugate of u

★ نکته: برای پیدا کردن $W = f(Z)$ وقتی $u(x,y)$, $V(x,y)$ به صورت پیچیده باشد

$$W = f(Z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

اگر $f(z)$ در قسمتی از محور x ها باشد آنگاه در مسئله به جای y، صفر قرار داده

و به جای x، Z قرار دهیم آنگاه $f(Z)$ بدست می‌آید.

$$f(z) = e^{-y}\sin x - i\,e^{-y}\cos x$$

$$y = 0 \rightarrow f(z) = \sin x - i\cos x \Rightarrow \sin Z - i\cos Z = f(Z)$$

$$f(Z) = \sin Z - i\cos Z$$

Example: $u(x,y) = y^3 - 3x^2y \longrightarrow V(x,y) = ?\ ,\quad F(Z) = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \rightarrow v = -\frac{6}{2}xy^2 + h(x) = -3xy^2 + h(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = +\cancel{3y^2} - h'(x) = \cancel{3y^2} - 3x^2$$

$$-h'(x) = -3x^2 \rightarrow -h(x) = -x^3 + C$$

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

$$f(z) = f(x+iy) = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

برای پیدا کردن $f(Z)$: y را صفر قرار داده و x را با Z عوض کنیم

$$f(Z) = i(Z^3 + C) = iZ^3 + iC$$

توابع معمولی "Elementary Functions"

۱ـ چند جمله‌ای ها که در همه جای صفحه تحلیلی اند:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

۲ـ توابع کسری

$$g(z) = \frac{h(z) \rightarrow \text{چندجمله‌ای}}{K(z) \rightarrow \text{چندجمله‌ای}}$$

در همه جا بجز $K(z)=0$ تحلیلی اند و ریشه‌های $K(z)=0$ را نقاط تکین Singularity Points گویند.

$f(x) = e^x$, $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

۳ـ تابع e^z

$$z = x + iy \longrightarrow f(x+i0) = e^x$$

"An entire function is a function that is analytic at each point in the entire finite plane."

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x\cos y + i\, e^x \sin y = e^{x+iy} = e^z$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

اثبات: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}(\cos y_1 \cos y_2 + i\sin y_2 \cos y_1 + i\sin y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

* if $z = iy \longrightarrow e^{iy} = \cos y + i\sin y$ = Euler formula.

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad , \quad e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

* if z is a pure imaginary:

$$z = iy \longrightarrow e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow e^z = \cos y + i\sin y$$

$$|e^z| = |\cos y + i\sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

* in general $z = x + iy$

$$|e^z| = e^x$$

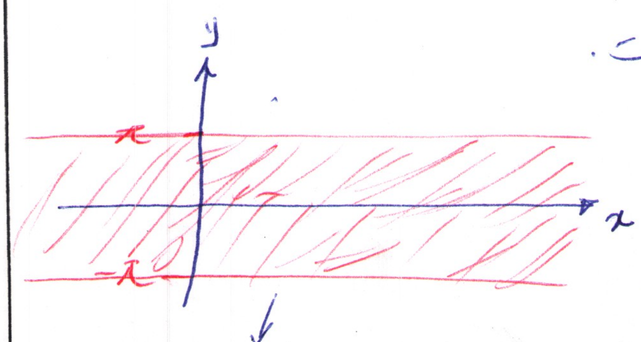
* $$\arg e^z = y \pm 2n\pi, \ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad (e^{z_1})^n = e^{nz_1}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

ج ج e^z یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$$

$$= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y)$$



بنابراین در راستای y با دورهٔ 2π متناوب است.

۳) مقادیر e^z [illegible] در ناحیه‌ای

به عرض 2π $\quad -\pi < y \le \pi$

Fundamental region of the exponential fuction e^z in the z-plane.

Show that $w = e^{z}$ is analytic?

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(e^{iy}) = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y$$

$$u = e^{x}\cos y,\quad v = e^{x}\sin y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

پس در شرایط کوشی ریمان صدق می‌کند لذا تحلیلی است

وجود $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$، $\frac{\partial v}{\partial y}$ و هر چهار پیوسته‌اند

شرط

Show about $w = e^{\bar{z}}$

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}e^{-iy} = e^{x}\cos y - i e^{x}\sin y$$

$$u(x,y) = e^{x}\cos y\ ;\quad v(x,y) = -e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{x}\cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

پس در شرایط کوشی ریمان صدق نمی‌کند لذا تحلیلی نیست.

prove:

$$e^{z+\pi i} \overset{?}{=} -e^{+z}$$

$$e^{z+\pi i} = e^{z}\cdot e^{\pi i} = e^{x}\cdot e^{iy}\cdot e^{i\pi} = e^{x}\cdot e^{i(y+\pi)} = e^{x}(\cos(y+\pi) + i\sin(y+\pi))$$

$$= e^{x}(-\cos y - i\sin y)$$

$$= -e^{x}(\cos y + i\sin y) = -e^{x+iy} = -e^{z}$$

$e^{z} = -1 \rightarrow z = ?,\quad z = (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

Trigonometric and Hyperbolic functions

Euler formulas: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $\qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \quad , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

→ it is natural to define the Sine and Cosine functions of a Complex variable z:

$x+iy=z$

$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$

$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Since e^{iz}, e^{-iz} are entire So $\sin z$ and $\cos z$ also entire.

همچنین توابع $\sin z$, $\cos z$ مشتق پذیرند زیرا شرایط کوشی ریمان را دارند.

$$\frac{d\sin z}{dz} = \cos z \quad , \quad \frac{d\cos z}{dz} = -\sin z$$

$$\sin(-z) = -\sin z \quad , \quad \cos(-z) = \cos z$$

Show that $2\sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1+z_2) + \sin(z_1-z_2)$

$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ✓ $\qquad \sin(z+2\pi) = \sin z$ ✓

$\sin 2z = 2\sin z \cos z$ $\qquad \cos(z+2\pi) = \cos z$ ✓

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ $\qquad \sin(z+\pi) = -\sin z$ ✓

$\cos(z+\pi) = -\cos z$ ✓

$\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$

$\sin(z-\frac{\pi}{2}) = -\cos z$

When y is real: $\sinh y = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$, $\cosh y = \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}$

$$\sin(iy) = \frac{e^{ixiy}-e^{-ixiy}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\times\frac{i}{i} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = \boxed{\sinh y}$$

$$\cancel{= \frac{\cos y + i\sin y - (\cos y - i\sin y)}{2i} = \frac{2i\sin y}{2i}}$$

$$\cos(iy) = \frac{e^{ixiy}+e^{-ixiy}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \boxed{\cosh y}$$

$$|\sin z|^2 \overset{!!}{=} \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

چون توابع هذلولوی توابع کراندار نمی‌باشند پس Sinz و Z کراندار نمی‌باشند. برخلاف Sinx و Cosx که همیشه کراندار بودند

$|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$

$$\sin z \overset{?}{=} \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = 0 \rightarrow |\sin z| = 0 \rightarrow \sin^2 x + \sinh^2 y = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = n\pi, & n = 0, \pm 1, \dots \\ \sinh y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\sin z \overset{?}{=} 0 \rightarrow z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\sin z = 0$ if and only if $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\cos z = 0 \longrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow z - \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad z = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \cos z = 0 \Longleftrightarrow z = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$(\tan z)' = \sec^2 z$

$(\cot z)' = -\csc^2 z$

$(\sec z)' = \sec z \tan z$

$(\csc z)' = -\csc z \cot z$

همه جا تحلیلی بجز $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $\cos z = 0$ یعنی نقاط تکین این تابع در محور حقیقی هستند

همه جا تحلیلی بجز در نقاط $z = n\pi$ سر محور حقیقی!

٣٠

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

Show that: $|\sin z| \geq |\sin x|$, $|\cos z| \geq |\cos x|$

$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, $\sinh y = \frac{-e^{-y}+e^{y}}{2} \Rightarrow \sinh^2 y = \frac{e^{2y}+e^{-2y}-2}{4}$

$2e^{2y}+e^{-2y}-2<0 \rightarrow e^{2y}+e^{-2y}<2 \quad e^{4y}+1<2e^{2y} = (e^{2y})^2-2e^{2y}+1<0$

$\rightarrow (e^{2y}-1)^2<0 \longrightarrow$ غیر ممکن است بنابراین

$\sinh y \geq 0$

$\rightarrow |\sin z| \geq |\sin x|$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \longrightarrow |\cos z| \geq |\cos x|$

Show, $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ for all z

$\overline{\cos iz} = \cos i\bar{z}$. for all z $\quad \left(\overline{\cos iz} = \overline{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2} = \frac{e^{-i\bar{z}}+e^{i\bar{z}}}{2}\right.$

$\overline{\sin iz} = \sin(i\bar{z})$ for $z = n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm \cdots$ $\quad \overline{\sin iz} = \overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)} = \frac{\overline{e^{iz}}-\overline{e^{-iz}}}{\overline{2i}} = \frac{e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}}}{-2i}$

$\overline{\sin z} = \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$

$\sin \bar{z} = \sin(x-iy) = \frac{e^{i(x-iy)}-e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix+y}-e^{-ix-y}}{2i}$

$= \frac{e^{ix}e^{y}-e^{-ix}e^{-y}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{y}(\cos x + i\sin x) - e^{-y}(\cos x - i \sin x)\right]$

$= \frac{e^{y}-e^{-y}}{2i}\cos x + \frac{i}{2i}(e^{y}+e^{-y})\sin x$

$= -i\sinh y \cos x + \sin x \cosh y = \overline{\sin z}$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

Hyperbolic Functions:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

چون e^z و e^{-z} تام هستند لذا $\cosh z$ و $\sinh z$ نیز توابعی تام هستند.

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$-i \sinh(iz) = \sin z \qquad \cosh(iz) = \cos z$$

$$-i \sin(iz) = \sinh z \qquad \cos(iz) = \cosh z$$

چون توابع $\sin z$ و $\cos z$ دوره‌ای با 2π متناوب هستند پس $\cosh z$ و $\sinh z$ دوره‌ای با $2\pi i$ متناوب هستند!

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

★ $\sinh z = 0$ if and only if $z = n\pi i$

★ $\cosh z = 0$ if and only if $z = (n\pi + \frac{\pi}{2})i$

$\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$, $\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z}$, $\overline{\tanh z} = \tanh \bar{z}$ when $\cosh z \neq 0$

$\tanh(z+\pi i) = \tanh z$, $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z$, $\cosh(z+\pi i) = -\cosh z$

تخ

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

The Logarithmic Function:

اگر داشته باشیم $z=e^{w}$ در اینصورت w را $\ln z$ نامیم و لگاریتم طبیعی $\log z$

$e^{w}=z \rightarrow w=\ln z = u+i\vartheta$, $z\neq 0$, and Complex

$z=re^{i\theta} \rightarrow w=\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ $\quad -\pi<\theta\leq\pi$

$e^{w}=e^{u}e^{i\vartheta}=re^{i\theta}$

$u=\ln r$, $\vartheta=\theta$, $r=|z|>0$, $\theta=\arg z$

$=\ln|z|$

$e^{u}=r \rightarrow u=\ln r$

$e^{i\vartheta}=e^{i\theta} \rightarrow \vartheta=\theta+2n\pi$

$z\neq 0$ $\quad \theta=\operatorname{Arg}z+2n\pi$, $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$

$\cos\vartheta+i\sin\vartheta = \cos\theta+i\sin\theta$

$W=\ln r+i(\operatorname{Arg}z+2n\pi) = \underbrace{\ln r+i\operatorname{Arg}(z)}_{\operatorname{Ln}z}+2n\pi i$

$W=\operatorname{Ln}z \pm 2n\pi i$, $n=1,2,\dots$

$\operatorname{Ln}z$ = Principle value of $\ln z = \ln r+i\operatorname{Arg}z$

آرگومان اصلی z بین $-\pi, \pi$

if z is positive real, $z=x$, $x>0$

$\operatorname{Arg}z=0$

در اینصورت $\operatorname{Ln}z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی برابر است

if z is negative real, $z=x$, $x<0$

$\operatorname{Arg}z=\pi$ لگاریتم طبیعی $\operatorname{Ln}x$ تعریف نشده است ولی

$\operatorname{Ln}z=\ln r+\pi i$ $\quad$ z is negative real.

$=\ln|z|+\pi i$ $\quad$ z is negative real

عل

صفحه	مرجع	تاريخ	عنوان

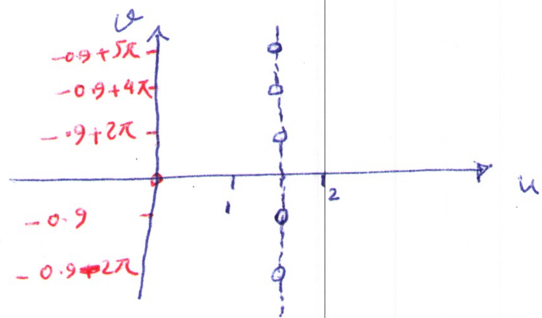
$\mathcal{L}\, 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i \longrightarrow \text{Ln } 1 = 0$

$\ln(-1) = \pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i \longrightarrow \text{Ln}(-1) = \pi i$

$\ln i = \frac{\pi i}{2}, -3\pi/2, 5\pi i/2 \longrightarrow \text{Ln}(i) = \frac{\pi i}{2}$

$\ln(3-4i) = \ln 5 + i \arg(3-4i) = 1.609438 - 0.927295\, i \pm 2n\pi i$

$\longrightarrow \text{Ln}(3-4i) = 1.609438 - 0.927295\, i$



- Familiar relations for the natural logarithm continue to hold for complex values, that is:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) \quad , \quad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$$

Example: $z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1$

$\text{Ln} z_1 = \text{Ln} z_2 = \pi i$ principle values of z_1 and z_2

$\mathcal{L}(z_1 z_2) = \text{Ln } 1 = 2\pi i$

However it is not true for principle value

$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } 1 = 0$

Analyticity of the logarithm:

For every $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ the following relation:

$$\mathcal{L}(z) = \operatorname{Ln} z \pm 2n\pi i$$

defines a function, which is analytic except at 0 and on the negative real axis and has derivative

$$(\ln(z))' = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0, \quad z \text{ not negative.}$$

Proof.

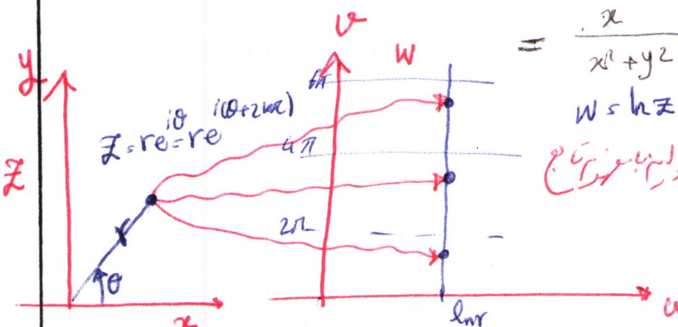
$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\arg z = \underbrace{\ln(\sqrt{x^2+y^2})}_{u(x,y)} + i\underbrace{(\tan^{-1}\frac{y}{x} + c)}_{v(x,y)}$$

$\rightarrow$

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \Big/ \sqrt{x^2+y^2} + i\,\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

$w = \ln z = \ln r + i\theta$



تعریف: نقطه به چندین نقطه ای در برد انتقال داده می شود این یعنی تابع چندمقداری است!

* $\mathcal{L}z$ در $z=0$ تحلیلی نیست!!

• A branch of a multiple-valued function f is any single-valued function F that is analytic in some domain at each point z of which the value $F(z)$ is one of the values selection of the values of f.

A branch cut is a portion of a line or curve that is introduced in order to define a branch F of a multiple-valued function f.

Points on the branch cut for F are singular points of F, and any point that is common to all branch cuts of f is called a branch point.

• هر تابع از توابع چندمقدار $\ln z$ یک شاخه‌ی Branch نامیده می‌شود از $\ln z$

$n=0 \longrightarrow \quad Lz = \ln r + i\,\mathrm{Arg}\,z$ is principle branch.

$-\pi < \theta \leq \pi$

یعنی θ را بازه‌ی مطلق کران می‌دهیم.

General Powers:

$z^c = e^{c \ln z}$, c complex and $z \neq 0$

$\ln z$ is a multi-valued function $\longrightarrow z^c$ is also multivalued func.

$z^c = e^{c\,\mathrm{Ln}\,z}$. is called the principal value of z^c

$c = \frac{1}{n} \longrightarrow z^c = \sqrt[n]{z} = e^{1/n \ln z} = \exp\left[\frac{1}{n}\ln r + \frac{i(\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi)}{n}\right]$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$= \sqrt[n]{r}\,\exp\left[i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$

$\theta = \mathrm{Arg}\,z \longrightarrow$ آرگومان اصلی

دو ۸۹/۱۰/۲ سال ۱۳۶۸

۲۴

عنوان

صفحه مرجع تاریخ

$i^i \overset{?}{=}, \qquad i^i = e^{i\ln i} = \exp(i\ln i) = \exp(i[i\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi i])$

$= e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi}$

$n=0 \longrightarrow$ priciple value $= e^{-\pi/2}$

$(1+i)^{(2-i)} = \exp[(2-i)\ln(1+i)] = \exp\{(2-i)[\cancel{\ln 2} + \frac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i]\}$

$= \exp[2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}i \pm 4n\pi i - i\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi]$

$= \exp[2\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi] \cdot \exp[\frac{\pi}{2} \pm 4\pi \cancel{n} \sqrt{2}]i$

$= 2e^{\pi/4 \pm 2n\pi}[\sin(\frac{1}{2}\ln 2) + i\cos(\frac{1}{2}\ln 2)]$

$a^z = e^{z\ln a} \longrightarrow$ if $\ln a$ is specified $\rightarrow a^z$ is entire function.