بسمه تعالی

دانشگاه سمنان

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

دست نوشته های درس

"ریاضی مهندسی"

مدرس:

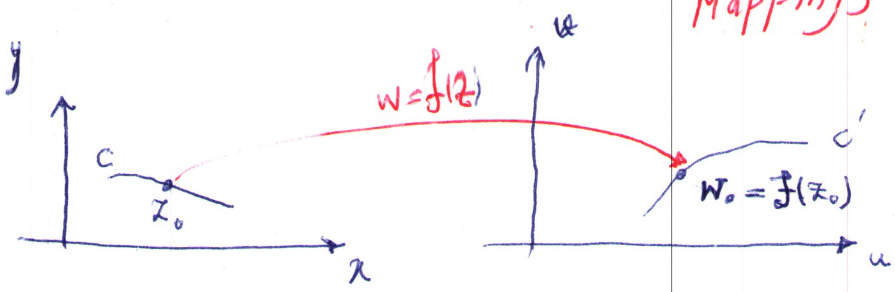
دکتر محمد صادق ولی پور

اردیبهشت ماه ۱۳۹۹

یکشنبه ۷،۵ صبح و ۵-۷ عصر

عنوان سه‌شنبه ۷،۵ صبح تا ۱۰ تاریخ مرجع صفحه

نگاشت های "Mappings"

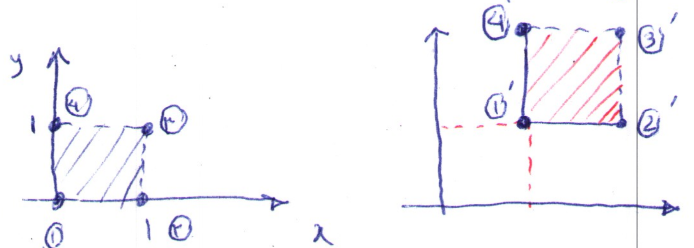


$w = f(z)$

به w_0 تصویر نقطه z_0 تحت نگاشت $f(z)$ گویند

c' را تصویر منحنی c تحت نگاشت $f(z)$ گویند.

نگاشت: $W = Z + b$ انتقال در صفحه مختلط می‌باشد



$W = Z + 1 + j$: ① $Z = 0 \rightarrow W = 1 + j = ①'$

② $Z = 1 \rightarrow W = 2 + j = ②'$

③ $Z = 1 + j \rightarrow W = 2 + 2j = ③'$

④ $Z = j \rightarrow W = 1 + 2i = ④'$

نگاشت $W = AZ$

A is Complex and nonzero,

$$A = a e^{i\alpha} \quad , \quad Z = r e^{i\theta} \rightarrow w = a r e^{i(\alpha+\theta)}$$

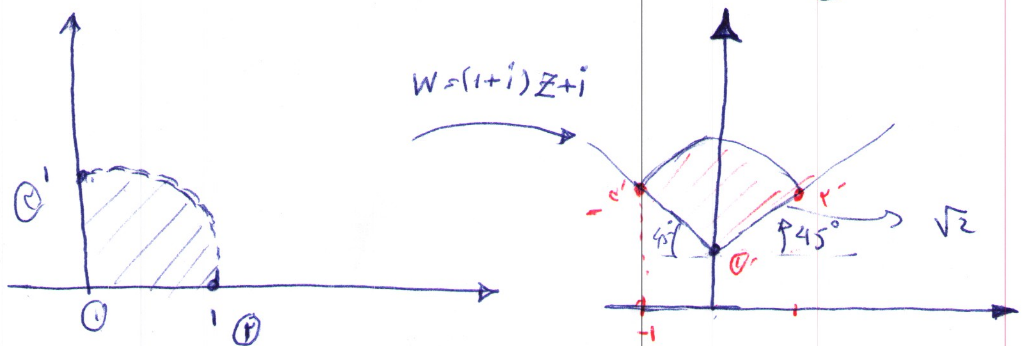
دوران همراه با کوچک و یا بزرگ کردن است.

یعنی به اندازه α حول مبدأ دوران می‌دهد و به اندازه $a = |A|$ کوچک و یا بزرگ می‌شود.

نگاشت : $W = az+b$ که حاصل ترکیب دو حالت قبل باشد

$Z = Az \quad (A \neq 0)$, $W = Z + b$

هر انتقال توام با دوران زاویه بشه.



① $z = 0 \to w = i \to ①'$

② : $z = 1 \to w = 1 + 2i$ ②'

③ $z = i \to w = i(1+i)+i = 2i - 1$ ③

$W = (1+i)(x+iy)+i = x+iy+xi-y+i$

$= x-y+(x+y+1)i$

$= u + vi$

$u = x-y \ , \quad v = x+y+1$

$1+i = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

نگاشت $W = Z^2$

$$Z = x + iy \longrightarrow W = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$= u + iv$$

$$u = x^2 - y^2 \quad (1) \qquad , \quad v = 2xy \quad (2)$$

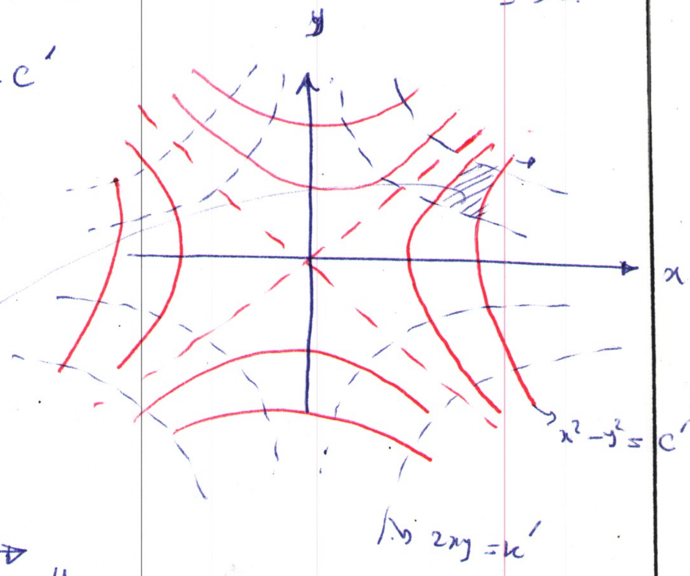
حال را بررسیم: خطوط $u = c'$ و $v = k'$ در صفحه W، در صفحه Z چه بوده‌اند؟

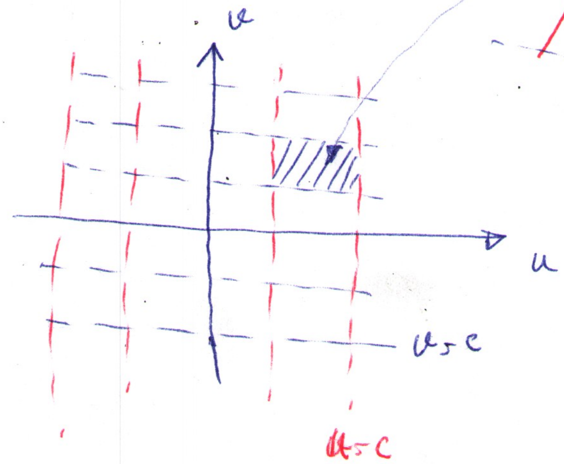
خطوط $x = c$ و $y = k$ در صفحه Z، در صفحه W به چه تبدیل می‌شوند؟

برای اینکه بدانیم $u = c'$ در اصل چه بوده است بین معادلات ① و ② و $u = c'$، عامل را حذف می‌کنیم

$$x^2 - y^2 = c' \longrightarrow x^2 = y^2 + c'$$

$$2xy = k' \longrightarrow x = \frac{k'}{2y}$$





برای اینکه متوجه شویم خطوط $x=c$ و $y=k$ به چه تبدیل می‌شوند:

$$u = x^2 - y^2 \longrightarrow u = c^2 - y^2$$

$$x = c$$

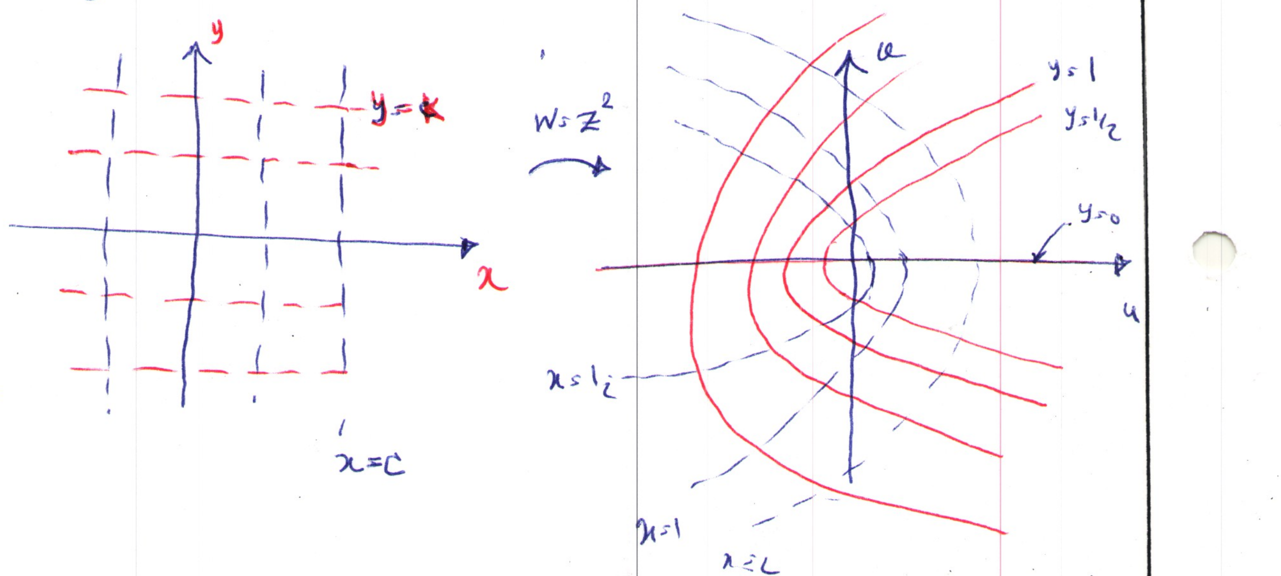
$$v = 2xy \longrightarrow v = 2cy \longrightarrow v^2 = 4c^2y^2 \longrightarrow u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$$

$$\longrightarrow v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

خطوط $x=c$ تبدیل می‌شوند به

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ y = k \end{array}\right\} \longrightarrow u = x^2 - k^2$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2xy \end{array}\right\} \longrightarrow v = 2xk \longrightarrow v^2 = 4x^2k^2 \longrightarrow x^2 = \frac{v^2}{4k^2} \longrightarrow v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$



نگاشت $W = \frac{1}{z}$

$$z = re^{i\theta} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

ارتباط یک به یک را بین نقاط غیر صفر z و w برقرار می‌کند.

$$\left\{ \begin{array}{l} z\bar{z} = |z|^2 \\ \mathcal{Z} = \frac{1}{z\bar{z}} z = \frac{1}{|z|^2} z \quad , \quad W = \bar{\mathcal{Z}} \end{array} \right\}$$

$W = u + iv$

$z = x + iy$

$$\rightarrow W = \frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}}\bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$z = \frac{1}{W} = \frac{\bar{W}}{|W|^2} = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

نگاشت $W = \frac{1}{z}$، دایره (یا خط) را به ~~دایره (یا خط)~~ (خط یا دایره) تبدیل می‌کند.

دقت کنید:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (I)$$

این معادله یک خط یا دایره در صفحهٔ xy حقیقی است

وقتی A و B و C و D حقیقی بوده و $B+C^2 > 4AD$ باشد.

$A \neq 0 \rightarrow$ it will be a circle

$A = 0 \rightarrow$ it will be a line

when $A \neq 0 \rightarrow$ We need the condition, $B+C^2 > 4AD$ because

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{B^2+C^2-4AD}}{2A}\right)^2$$

when $A=0 \rightarrow B^2+C^2>0$

به شرط اینکه B , C هر دو همزمان نمی‌توانند صفر باشند

$$\rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\rightarrow A\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + B\frac{u}{u^2+v^2} + C\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + D = 0$$

$$A\left(\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + B\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{Cv}{u^2+v^2} + D = 0$$

طرفین را در (u^2+v^2) ضرب می‌کنیم

$$A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0$$

$$D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0 \qquad \text{(II)}$$

معادله دایره در صفحه جدید (u,v) بنابراین نگاشت دایره‌ها به دایره تبدیل می‌کند

به طور عکس اگر u و v در معادله (II) صدق کنند، x و y در معادله I صدق خواهند کرد.

حالت خاص:

$A=0 , D\neq 0 \longrightarrow$

خطوطی که در صفحه z بوده و از مبدا نمی‌گذرند، دایره‌ای در صفحه w تبدیل می‌شوند که از مبدا می‌گذرند.

$A\neq 0 , D=0$

دایره‌ای که از مبدا در صفحه z می‌گذرند به خطوطی در صفحه w که از مبدا نمی‌گذرند تبدیل می‌شود.

$A=D=0$ خطوطی که در صفحه z از مبدا می‌گذرند به خطوطی در صفحه w که از مبدا می‌گذرند تبدیل می‌شوند.

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

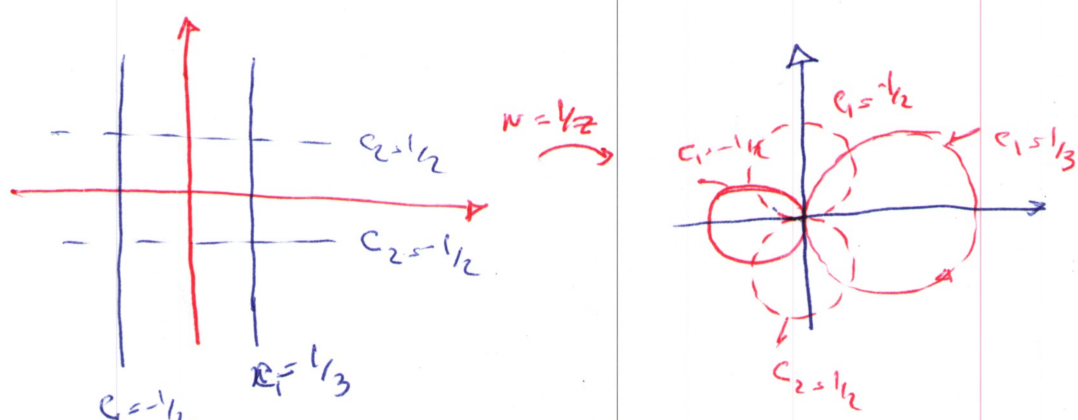
Example: $x = c_1 \quad , c_1 \neq 0$

$$\to w = \frac{1}{z} \to c_1 = \frac{u}{u^2+v^2} \to -c_1(u^2+v^2)+u=0$$

$$\to \left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

if $c_1 > 0 \to$ دوایر در سمت راست محور ها خواهند بود

if $c_1 < 0$ " " " چپ محور ها خواهند بود



$$y = c_2 \to \frac{-v}{u^2+v^2} = c_2 \to c_2(u^2+v^2)+v=0$$

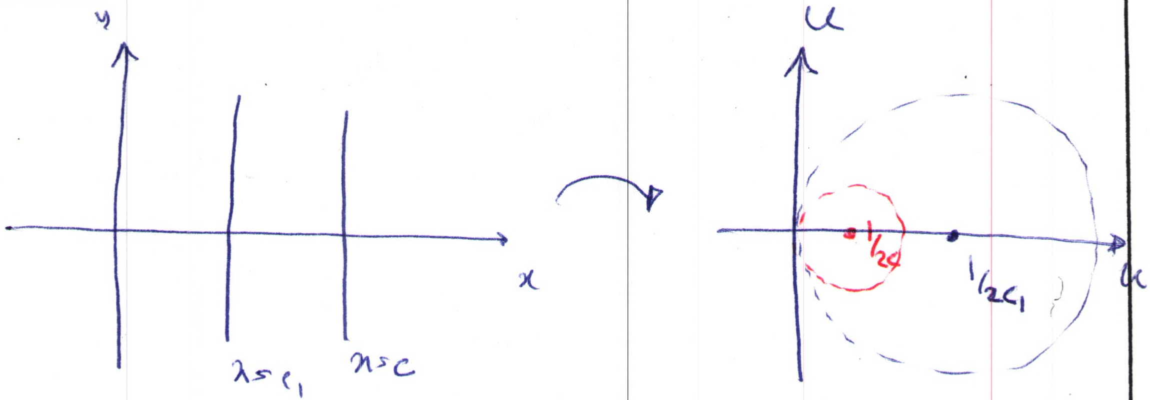
$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2$$

$x \geq c_1 \xrightarrow{c_1>0} \frac{u}{u^2+v^2} \geq c_1 \; , \quad c_1(u^2+v^2) \leq u$

$c_1(u^2+v^2) - u \leq 0$

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان



صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

نگاشت : $W=\sin z$

$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$

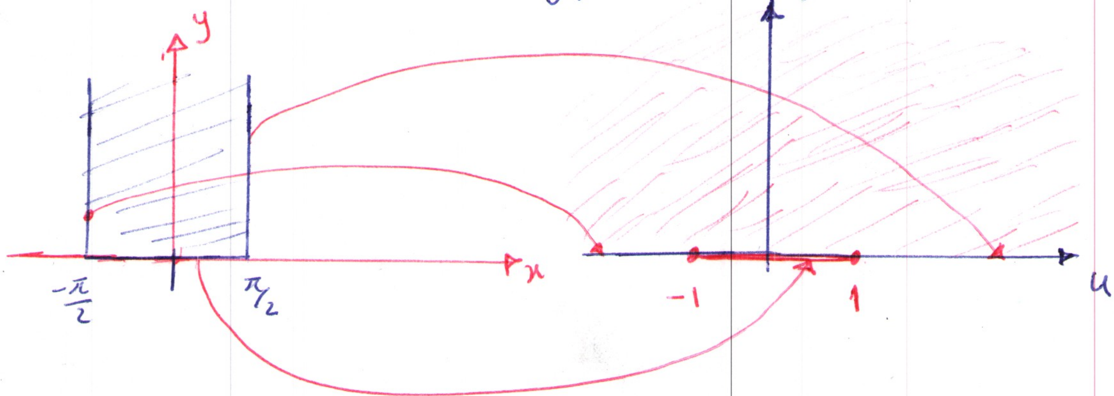
$\sin x\cosh y+i\cos x\sin h$

$W=\sin z=u+iv=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$u=\sin x\cosh y$

$v=\cos x\sinh y$

مثال: با استفاده از این نگاشت (تبدیل) باند $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ y\geq 0\end{cases}$ را در صفحه Z در صفحه W بدست آورید:



$\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\ y\geq 0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u=\cosh y>1\\ v=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y\geq 0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u=-\cosh y<-1\\ v=0\end{cases}$

$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ y=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u=\sin x\quad -1<u<1\\ v=0\end{cases}$

44-2

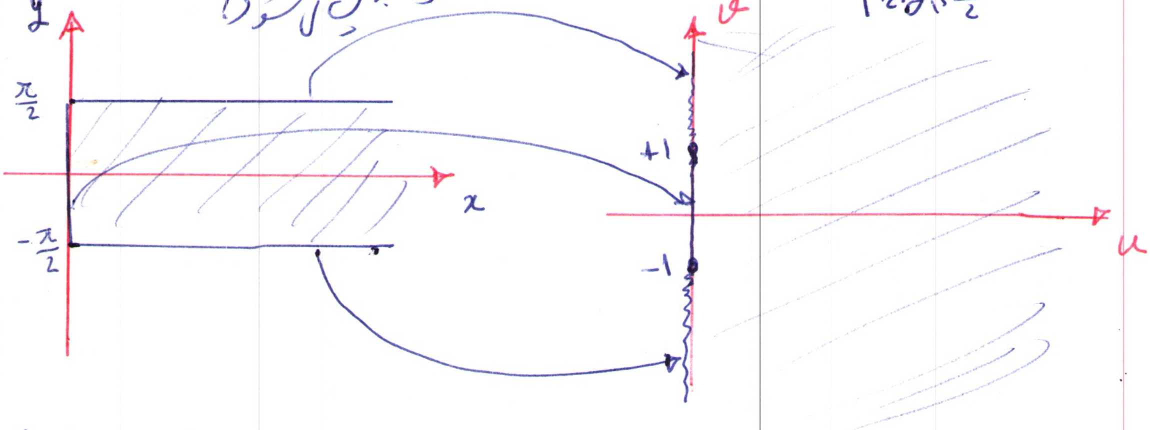
صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

تبدیل $W=\sinh z$

$W=\sinh z=u+iv=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$

$$\begin{cases} u=\sinh x\cos y \\ v=\cosh x\sin y \end{cases}$$

ستون باند $\begin{cases} x\geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$ را در z در نظر گرفته و بگویید تحت W به چه تبدیل می‌شود!



$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases} \to \begin{cases} u=0 \\ v=\cosh x\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y=-\frac{\pi}{2} \end{cases} \to \begin{cases} u=0 \\ v=-\cosh x<-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -\frac{\pi}{2}\leq y<\frac{\pi}{2} \end{cases} \to \begin{cases} u=0 \\ v=\sin y\ ,\ -1<v<1 \end{cases}$$

1

کی

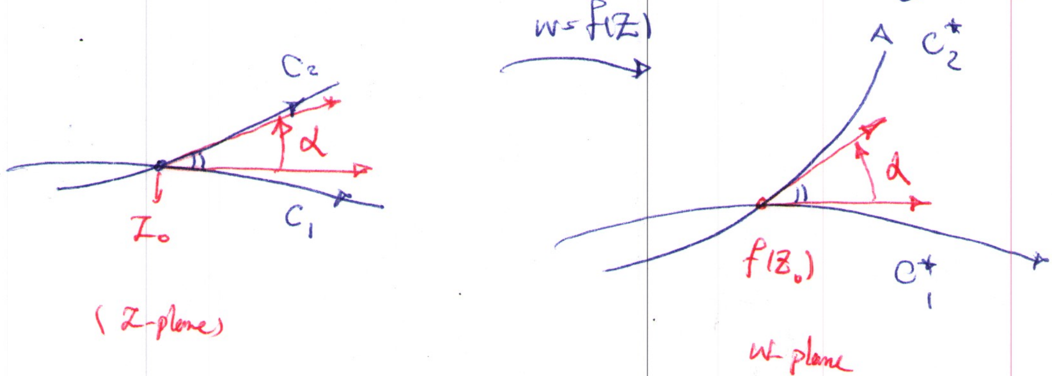
صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

نگاشت همدیس "Conformal Mapping"

نگاشت همدیس زاویه دو منحنی را از نظر اندازه و نیز جهت ثابت نگه می‌دارد.

A mapping $w=f(z)$ is called Conformal if it preserves angles between oriented curves in magnitude as well as in sense.

زاویه بین دو منحنی، α، زاویه‌ای است بین 0 و π ($0<\alpha<\pi$) که بین دو منحنی متقاطع تعریف شود.

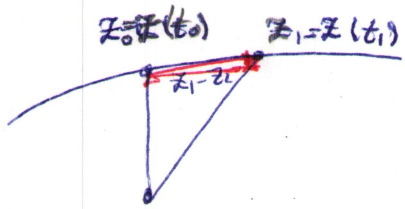


قضیه: نگاشت تابع تحلیلی $W=f(z)$ همدیس است مگر در نقاطی که در آن $f'(z_0)=0$ باشد.

یا هر تابع تحلیلی در جاهائی که $f'(z)\neq 0$ باشد یک نگاشت همدیس است.

مثلاً، $W=z^2$ در همه جا همدیس است بجز در مبداء که $f'(z)=2z=0$ می‌باشد که زاویه را دو برابر می‌کند.

$C:\ z(t)=x(t)+iy(t)$



$$\dot z(t_0)=\frac{dz}{dt}\Big|_{t_0}=\lim_{t_1\to t_0}\frac{z(t_1)-z(t_0)}{t_1-t_0}$$

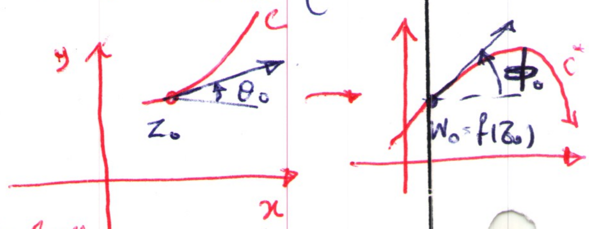
$$w=f(z)=f[z(t)]$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\rightarrow \dot w=f'(z)\cdot\dot z(t)$$

$$\arg\left(\frac{dw}{dt}\right) = \arg\left(f'(z)\right) + \arg\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\arg(\dot{w}) = \arg f' + \arg \dot{z}$$

$z = z_0$ بعنوان مثال در

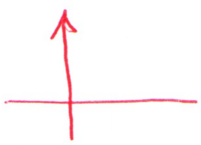


$$\arg(\dot{w}(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t)$$

$$\underbrace{\arg(\dot{w}(t_0))}_{\phi_0} - \underbrace{\arg \dot{z}(t)}_{\theta_0} = \underbrace{\arg f'(z_0)}_{\psi_0}$$

$\theta_0 \rightarrow$ شیب منحنی در z_0

$\phi_0 = \theta_0 + \psi_0$



$f'(z_0) \neq 0$ و ثابت می‌باشد چون شیب منحنی در نقطهٔ z_0 متغیر و ثابت است فقط زاویه تغییر

یعنی هر منحنی در z_0 به میزان ثابت دوران می‌کند، پس زاویه دو منحنی ثابت می‌ماند.

$C_1: \quad \phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \quad \longrightarrow \quad \phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$

$C_2: \quad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$

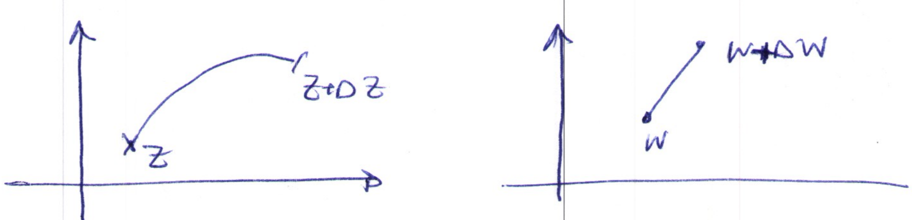
نتیجه‌ها

(1)

$$w = f(z) \rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) \rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta W}{\Delta Z}\right| \simeq |f'(z)|$$

$$\left|\frac{\Delta W}{\Delta Z}\right| \approx |f'(z)| \longrightarrow |\Delta W| = |\Delta z|\,|f'(z)|$$

یعنی نگاشت $w = f(z)$ جزء طول $|\Delta z|$ را در $|f'(z)|$ ضرب می‌کند.



(2)

$$|f'(z)|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

from Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$\to |f'(z)|^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ $\to$ $x_u = \frac{1}{J} v_y$, $x_v = -\frac{1}{J} u_y$, $y_u = -\frac{1}{J} v_x$
$y_v = +\frac{1}{J} u_x$

که این دترمینان مساوی ژاکوبین تبدیل می‌باشد. به شرطی که $f'(z) \neq 0$ باشد.

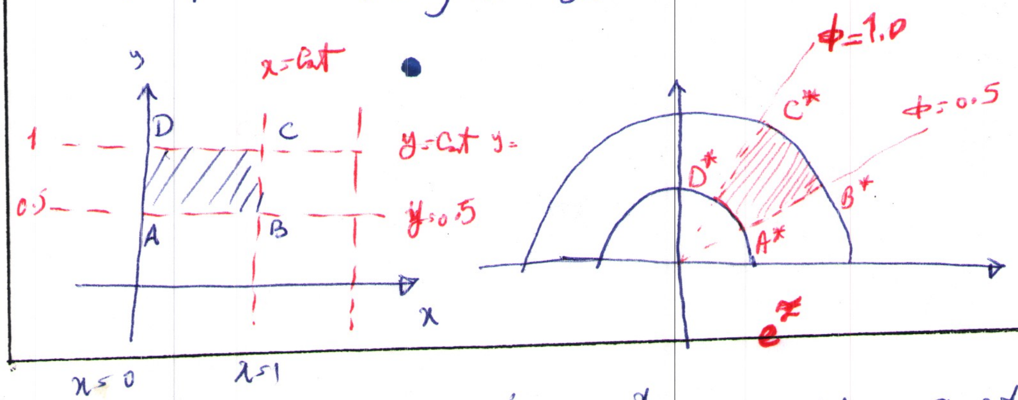
$W = z^n$, $n = 2, 3, \dots$ is Conformal except @ $z=0$

ناحیه زاویه‌ای $0 \le \theta \le \pi/n$ را به $v \ge 0$ نگاشت می‌کند

$W = e^z$, $z = x + iy$

تعبیر :

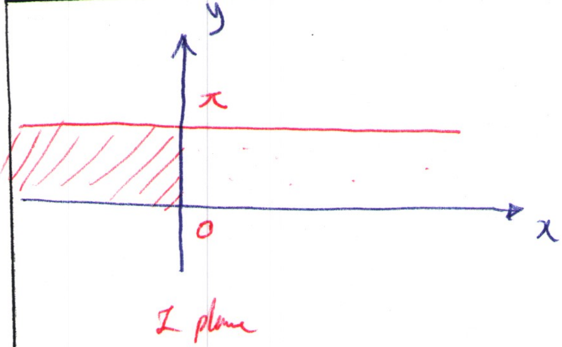
$|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$

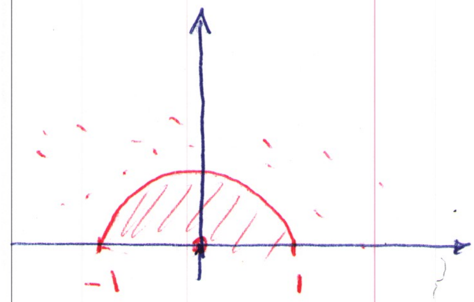


نتایج

خطوط $x = Cst$ به دایره‌های $|w| = e^x$ نگاشت می‌شوند.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه





$0<y<\pi$ $\qquad$ $0<\arg w<\pi$

صفر تولید نشد چون $w=0\neq e^{z}$

به ازاء هیچ z ، e^{z} صفر نمی‌شود.

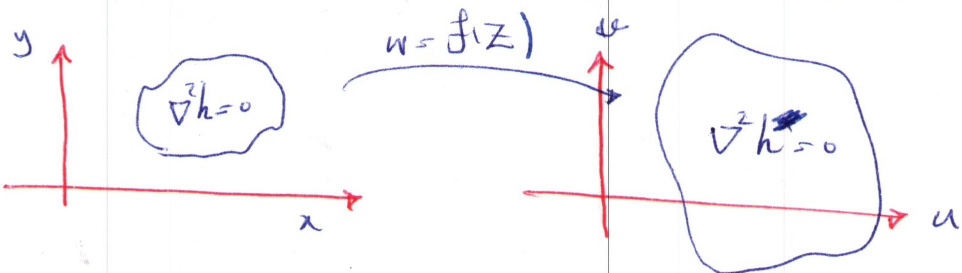
$$z=0 \longrightarrow e^{z}=1$$

$$z=i\pi \rightarrow e^{z}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$z=-1 \rightarrow e^{-1}=\frac{1}{e}$$

قضیه: فرض کنیم که تابع $h(x,y)$ همساز باشد در حوزه D یعنی در معادله لاپلاس صدق کند

با تغییر متغیر حاصل از یک نگاشت همدیس تابع جدید $h(u,v)$ باز هم همساز خواهد بود.



یعنی

$$\nabla^2 h=0 \rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \overset{?}{\Longrightarrow} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (I)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial h}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad II$$

$$I + II = \left[\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial u}\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\right)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

$$\cancel{= \left[\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right]}\Big[$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

تابع هارمونیک   تابع تحلیلی   شرط کوشی ریمان

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right)(\dots)+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)(\dots)+\frac{\partial u}{\partial x}\cancel{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y}\cancel{\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)}+\dots+\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right)\left|f'(z)\right|^2$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

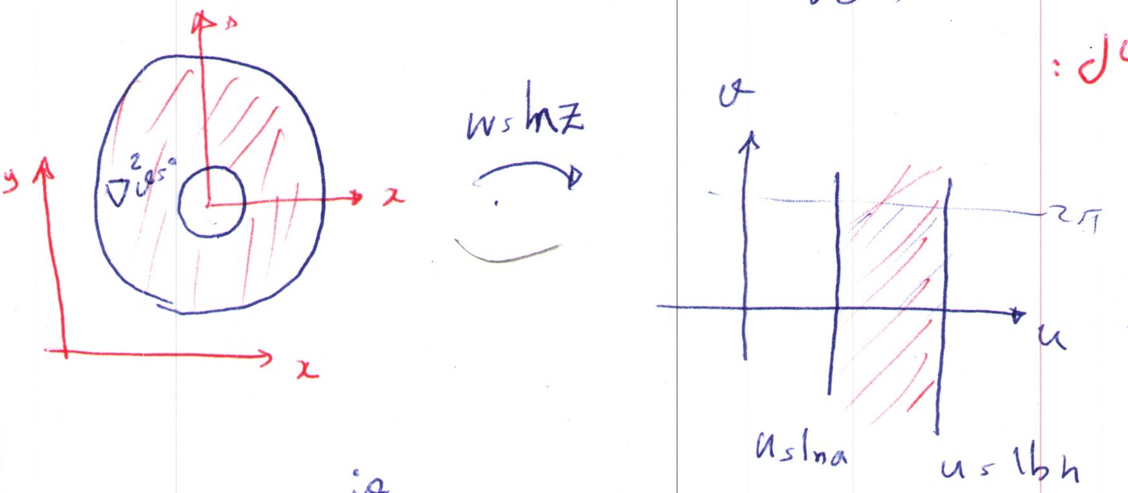
$=$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right)\left|f'(z)\right|^2=0$$

$$f'(z)\neq 0 \longrightarrow \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right)=0$$

همساز h تحت نگاشت همدیس حفظ می‌کند که در آن $f'(z)\neq 0$ شرط نگاشت همدیس می‌شود

مثال:



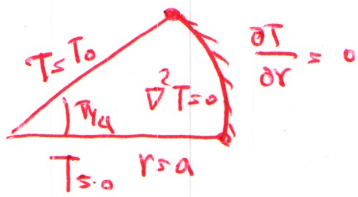
$u+iv=\ln r e^{i\theta}$

$u=\ln r \rightarrow r=a \longrightarrow u=\ln a$

$v=\varphi \quad \rightarrow r=b \longrightarrow u=\ln b$

$\varphi=0 \longrightarrow v=0$

$\varphi=2\pi \rightarrow v=2\pi$



نگاشت همدیس $w=\ln z$ را اعمال می‌کنیم.

$w=\ln z, \quad u+iv=\ln r+i\theta \quad , z=re^{i\theta}$

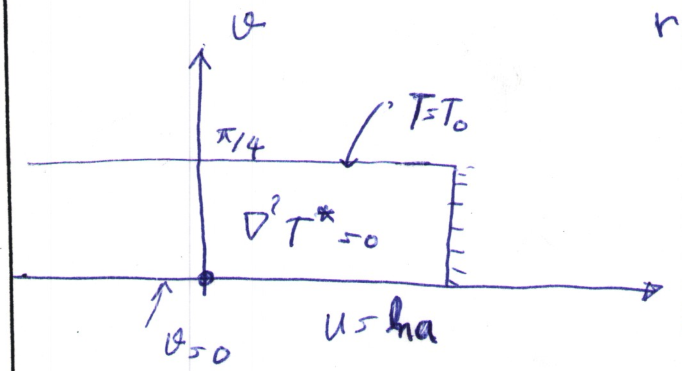
$\rightarrow u=\ln r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

$v=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

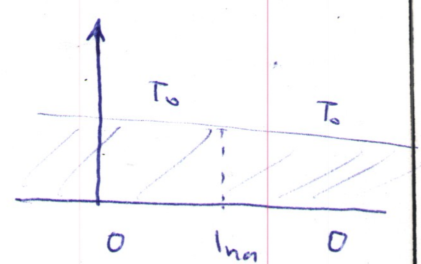
$\theta=0 \rightarrow v=0$

$\theta=\frac{\pi}{4} \rightarrow v=\frac{\pi}{4}$

$r=a \rightarrow u=\ln a$



$\equiv$



$T(u,v)=Av+B \longrightarrow T(u,0)=0 \rightarrow B=0$

$T(u,\pi/4)=T_0 \rightarrow A=\frac{4T_0}{\pi}$

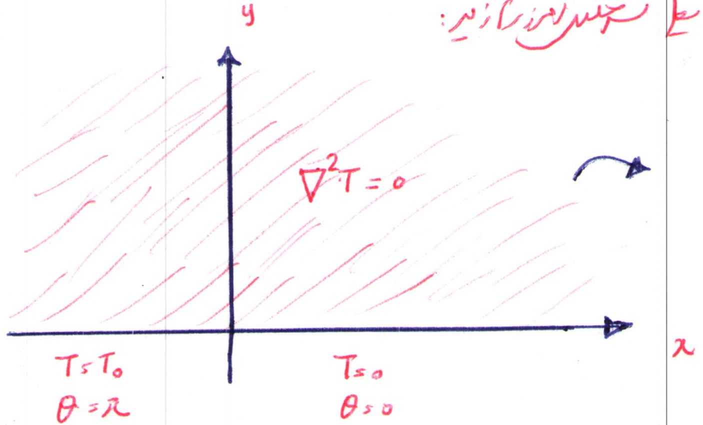
$T(u,v)=\frac{4}{\pi}T_0 v$

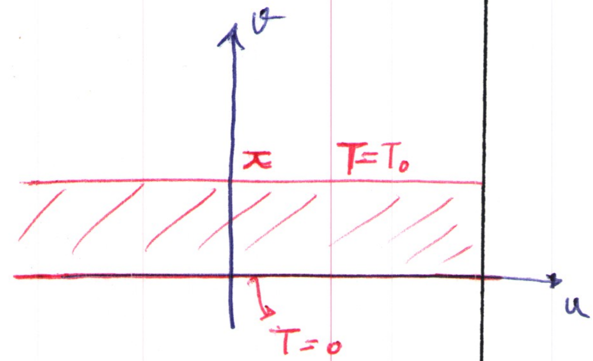
$T(x,y)=\frac{4}{\pi}T_0\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{4}{\pi}T_0\,\theta$

مزیتش که جواب ساده است، سرراست.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

مثال: مطلوبست حل معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر:





برای حل این مسئله از تابع تبدیل (نگاشت) $w = \log z$ را در نظر بگیریم.

$$u + iv = \ln\sqrt{(x^2+y^2)} + i\theta \qquad , \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

ملاحظه است که تابع $w = \log z$ بجز در مبداء مختصات در بقیه جاها کانفورمال می‌باشد. از طرفی قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در معادله لاپلاس صدق می‌کنند حال اگر جزء موهومی تابع $\ln z$ را در نظر بگیریم بدیهی است که آن نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \begin{cases} z = x, y = 0 \rightarrow w = u , v = 0 \\ z = -x \rightarrow w = u , v = \pi \\ z \rightarrow 0 \rightarrow w \rightarrow -\infty \\ z \rightarrow \infty \rightarrow w \rightarrow \infty \end{cases}$$

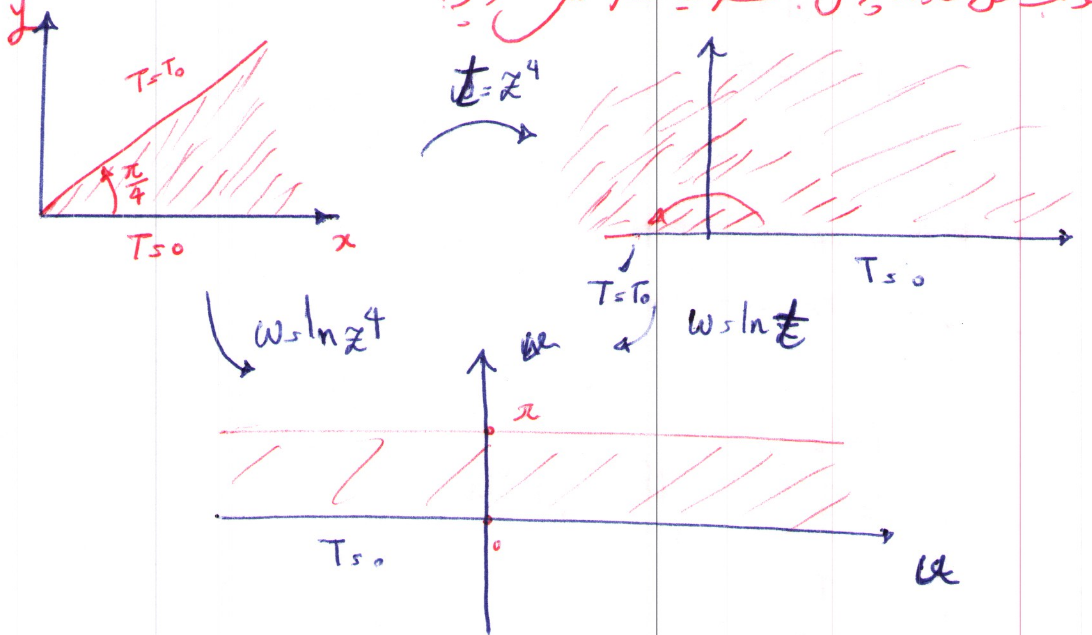
$$\rightarrow \begin{cases} T = A + Bv \\ v = 0 \rightarrow T = 0 \rightarrow & T = 0 \rightarrow A = 0 \\ v = \pi \rightarrow T = T_0 \rightarrow & T_0 = B\pi \rightarrow B = \frac{T_0}{\pi} \end{cases}$$

$$\rightarrow T = \frac{T_0}{\pi} v = \boxed{\frac{T_0}{\pi} \arctan\frac{y}{x}}$$

51''

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

مطلوبست حل معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر:



$$T = A + Bv \rightarrow$$

$$\begin{cases} v=0 \\ T=0 \end{cases} \rightarrow A=0, \qquad \begin{cases} v=\pi \\ T=T_0 \end{cases} \rightarrow B=\frac{T_0}{\pi}$$

$$T = \frac{T_0}{\pi} v$$

$$u+iv = \ln z^4 = \ln\left[(x^4-6x^2y^2+y^4)+i(4x^3y-4y^3x)\right]$$

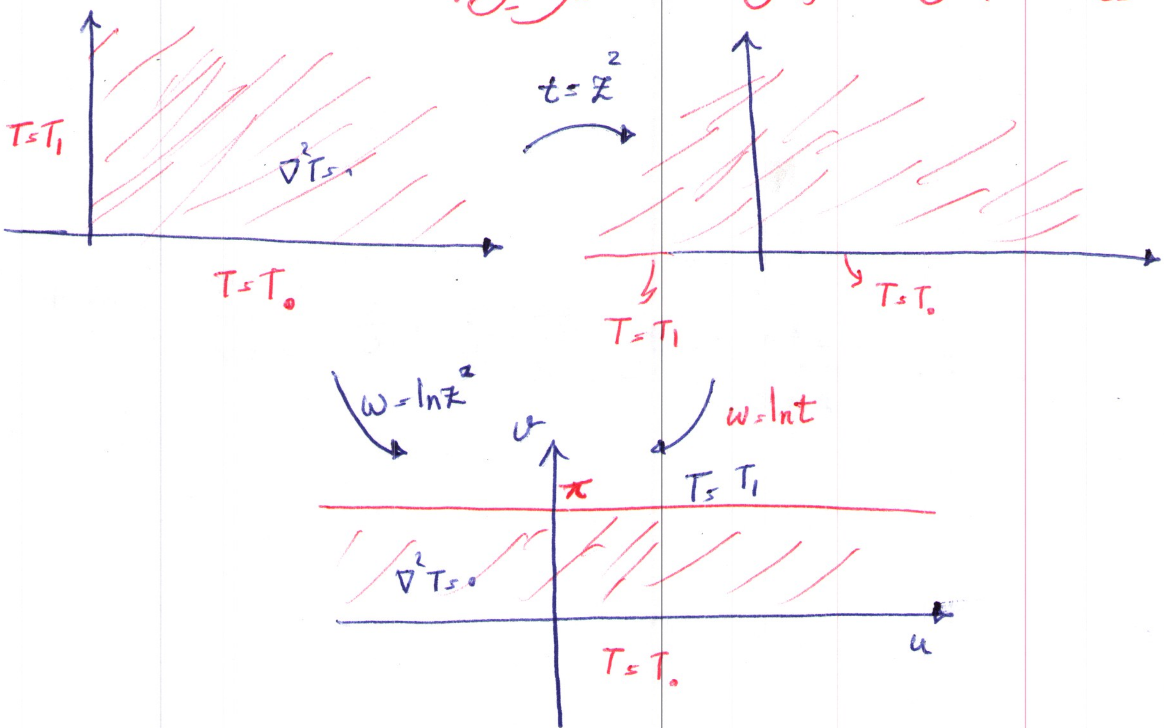
$$= \ln\sqrt{[x^4-6x^2y^2+y^4]^2+[4x^3y-4y^3x]^2} + tg^{-1}\frac{4x^3y-4y^3x}{x^4-6x^2y^2+y^4}$$

$$\rightarrow v = \text{Arctg}\,\frac{4x^3y-4y^3x}{x^4-6x^2y^2+y^4}$$

$$T = \frac{T_0}{\pi}\,\text{arctg}\,\frac{4x^3y-4y^3x}{x^4-6x^2y^2+y^4}$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

تمرین: مطلوبست حل معادله لاپلاس با شرایط مرزی ذیل:



$$\rightarrow \nabla^2 T = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \rightarrow T = Av + B$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = T_0 \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow T_0 = B$$

$$\begin{cases} T = T_1 \\ v = \pi \end{cases} \rightarrow T_1 = Av + B = A\pi + T_0 \rightarrow A = \frac{T_1 - T_0}{\pi}$$

$$\rightarrow T = \frac{T_1 - T_0}{\pi} v + T_0$$

$$\omega = u + iv = \ln z^2 = \ln(x^2 - y^2 + i2xy) = \ln\left[(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2\right]^{1/2} + tg^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$\rightarrow v = tg^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\pi} tg^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2} + T_0$$

52

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

linear fractional Transformation نگاشت خطی کسری

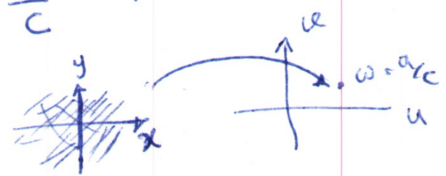
$W = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad - bc \neq 0$ $\rightarrow$ Möbius یا موبیوس

a, b, c, d are Complex or real number

$W' = \dfrac{\cancel{ad}\ a(cz+b) - c(az+b)}{cz+d} = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$

$W' \neq 0,\ ad-bc \neq 0$ بنابراین نگاشت Conformal است و همه جا پیوسته

اگر $ad - bc = 0$ باشد، $w = \dfrac{a}{c}$ یعنی تمام نقاط صفحه z تبدیل به یک نقطه می‌شود



Special Cases:

$W = z + b$ Translation

$W = az$, $|a| = 1$ Rotation

$W = az + b$ linear transformation

$W = \dfrac{1}{z}$ inversion in the unit Circle.

چه شود!

قضیه :

Every linear fractional transformation, $(W = \dfrac{az+b}{cz+d})$ maps the totality of circles and straight lines in the z-plane onto the totality of Circles and straight lines in the w-plane.

Extended Complex Plane:

صفحه مختلط گسترش یافته :

$$W = \frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow$$

for each z in which $cz+d \neq 0 \longrightarrow$ we have a Corresponding unique w in (1)

if $c \neq 0 \longrightarrow$ for $z = -d/c$ we have, $cz+d=0$

حال ما چه W ای به ازای $z=-d/c$ داریم ؟

ما قرار می‌دهیم $W=\infty$ را به عنوان نقطه متناظر $z=-d/c$

اگر ∞ را به عنوان نقطه‌ای از صفحه مختلط در نظر بگیریم صفحه مختلط را صفحه گسترش یافته می‌نامیم

$$W(cz+d) = az+b \rightarrow (wc-a)z = b-dw$$

$$z = \frac{b-dw}{c\cancel{z}w-a} = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

$$W = \frac{a}{c} \longrightarrow z = \infty$$

Fixed Points

fixed points of a Maping $w = f(z)$ are Points that are mapped onto themselves,

نقاط ثابت تبدیل نقاطی هستند که به خودشان تبدیل می‌شوند.

$$w = f(z) = z$$

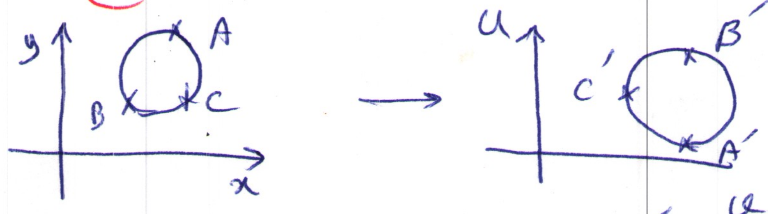
$$z = \frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow cz^2 + dz = az + b$$

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

این حداکثر دو ریشه دارد بنابراین دو fixed point دارد.

اگر همه نقاط صفحه ثابت باشند یعنی بیش از ۲ fixed point داشته باشیم آنگاه نگاشت همانی $w = f(z) = z$ است.

اگر بتوانیم سه نقطه مختلف را به سه نقطه معین ~~...~~ تبدیل کرد آن‌گاه می‌توان یک نگاشت پیدا کرد.



قضیه: فقط و فقط یک نگاشت خطی کسری سه نقطه z_1، z_2 و z_3 را به ترتیب به سه نقطه معین w_1، w_2 و w_3 تبدیل می‌کند (دایره گذرنده بر سه نقطه اول نظیر دایره گذرنده بر سه نقطه دوم است)

از کجا بدست آورده‌اید؟

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

عنوان | تاریخ | مرجع | صفحه

$z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$

$w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$\frac{w-(-1)}{w-1} \cdot \frac{-i-(+1)}{-i-(-1)} = \frac{z-(-1)}{z-1} \cdot \frac{0-1}{0-(-1)}$$

$$w = \frac{z-i}{-iz+1}$$

Find: $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ $z_3 = \infty$

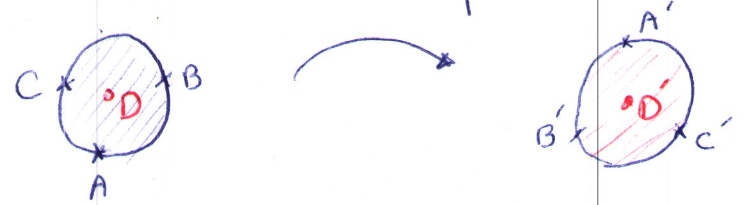
$w_1 = -1$ $w_2 = -i$ $w_3 = 1$

$$\frac{w-(-1)}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-(-1)} = \frac{z-0}{z-\infty} \cdot \frac{1-\infty}{1-0}$$

$$= \frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i+1} = z\left(\frac{1-\infty}{z-\infty}\right) \approx 1$$

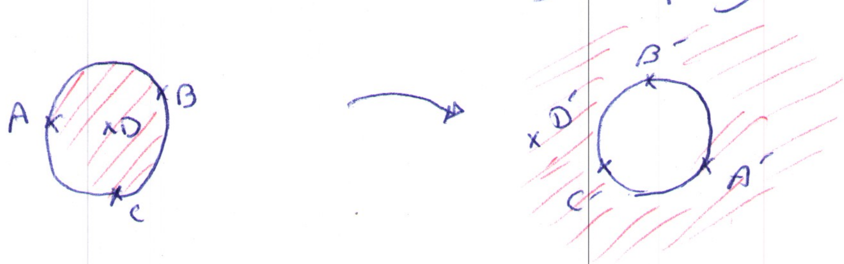
$$\rightarrow w = \cancel{\frac{z-i}{z+1}} \quad \frac{z(i-1)+(1+i)}{z(i-1)-(1+i)}$$ Cayley transformation.

نکته: هر منحنی بسته صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند.

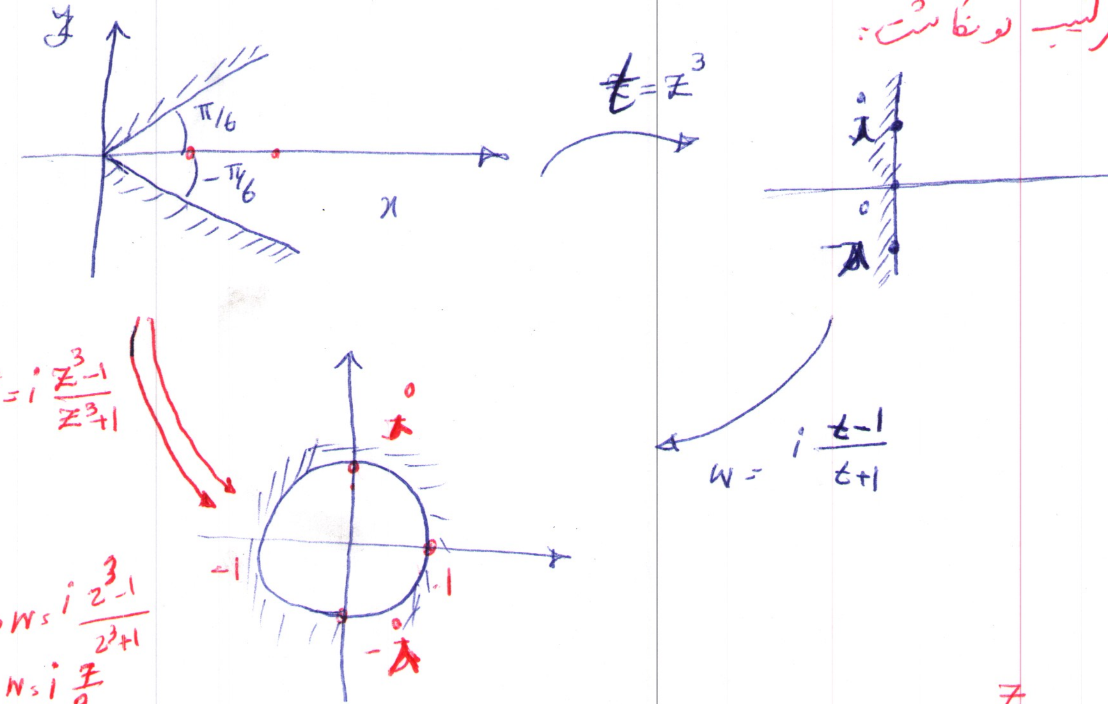


حال اگر سه نقطه متوالی منحنی بگیریم، اگر سه تبدیل به خارج تبدیل شود، ناحیه داخل به خارج نگاشت می‌شود.

و برعکس



ترکیب دو نگاشت:



$$t = z^3$$

$$W = i\,\frac{t-1}{t+1}$$

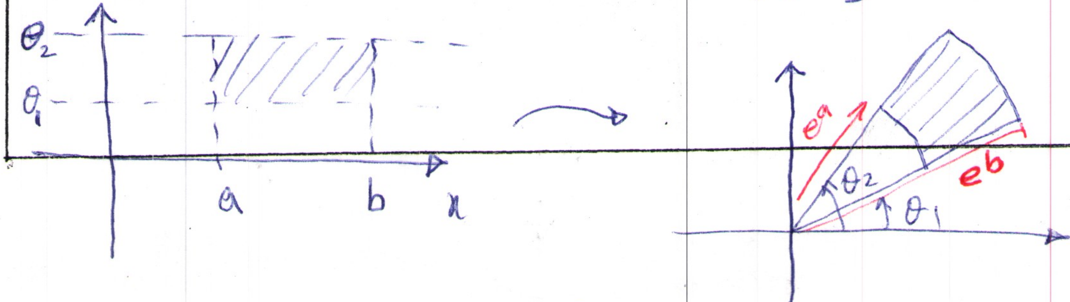
$$W = i\,\frac{z^3-1}{z^3+1}$$

$$z = 2 \rightarrow W = i\,\frac{2^3-1}{2^3+1}$$

$$W = i\,\frac{7}{9}$$

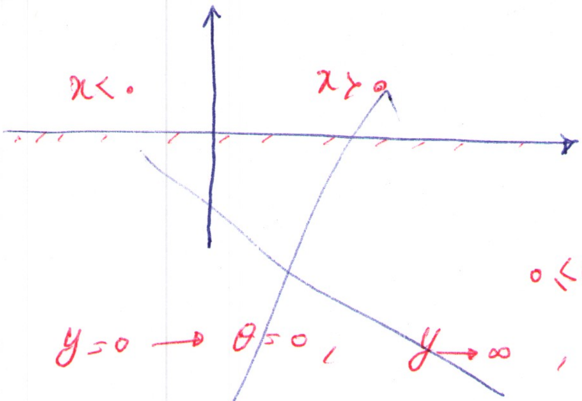
نگاشت e^z

$$W = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = R e^{i\theta}, \quad \begin{cases} R = e^{x} \\ \theta = y \end{cases}$$



عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

حالت خاص:



$r \to \infty$

$0 \le \theta \le \pi$

$y = 0 \to \theta = 0 \,, \quad y \to \infty \,, \quad \theta \to$

$0 \le y \le \pi$

مثال ۲) تبدیل خطی‌کسری را بیابید که نقاط ثابت آن i و $-i$ باشد.

$$W = \frac{az+b}{cz+d} \to z = \frac{az+b}{cz+d} \to cz^2 + dz = az + b$$

$$\to cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$z = +i \to -c - b + i(d-a) = 0$$

$$z = -i \quad (-i)(-i)c - b - i(d-a) = 0$$

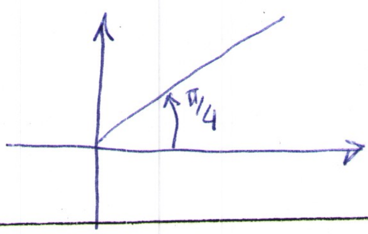
$$\to \quad -(2c+2b) = 0 \to \underline{c = -b}$$

$$\downarrow$$

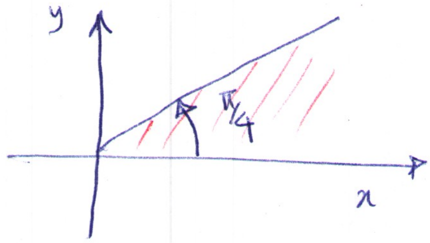
$$d = a$$

$$\to W = \frac{az+b}{-bz+a} = \frac{\frac{a}{b}z+1}{-z+\frac{a}{b}} = \frac{pz+1}{-z+p}$$

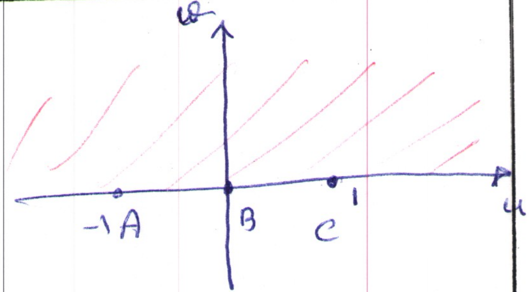
تابع تحلیلی بیابید که ناحیه مقابل را به داخل دایره $|W| \le 1$ تبدیل نماید $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$



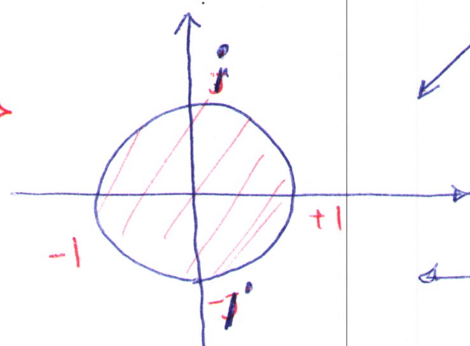
صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان



$W = z^4$



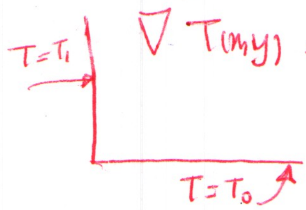
$$W = \frac{iz^4+1}{z^4+1}$$



$\begin{cases} z=-1 \\ W=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} z=1 \\ W=1 \end{cases}$

$\begin{cases} z=0 \\ W=-i \end{cases}$

$$W = \frac{it+1}{t+i}$$



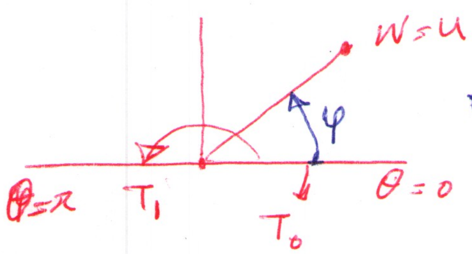
$$\nabla^2 T(x,y) = 0$$

اگر بخواهیم از جداسازی متغیرها استفاده کنیم باید این ناحیه را

به نوار تبدیل کنیم.

با استفاده از توابع مختلط،

ابتدا از نگاشت $W=z^2$ استفاده می‌کنیم تا ناحیه را به نیم صفحه تبدیل کنیم.



$$\nabla^2 T^*(u,v) = 0$$

$$T^*(u,v) = A\varphi + B$$

$$\varphi=0,\ T^*=T_0 \rightarrow B=T_0$$

$$\varphi=\pi,\ T^*=T_1 \rightarrow \pi A+T_0=T_1$$

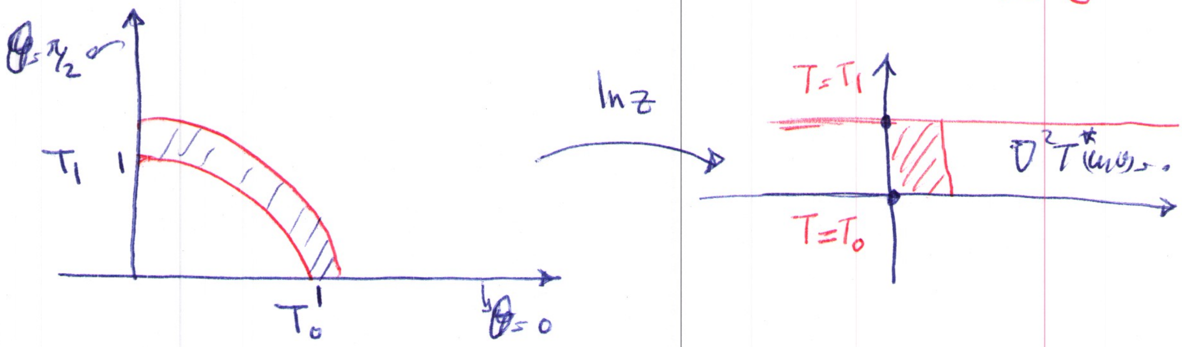
$$A = \frac{T_1-T_0}{\pi}$$

$$T^*(u,v) = \frac{T_1-T_0}{\pi}\varphi + T_0$$

$$\varphi = \arg w = 2\arg z = 2\tan^{-1}\frac{y}{x} \rightarrow \boxed{T(x,y) = 2\left(\frac{T_1-T_0}{\pi}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x} + T_0}$$

عنوان | تاریخ | مرجع | صفحه

می توان همین مسئله را تحت نگاشت lnz حل کرد :



$$u + iv = \ln z \longrightarrow u + iv = \ln r + i\theta \longrightarrow \begin{cases} v = \theta \\ u = \ln r \end{cases}$$

$$\theta = 0 \longrightarrow v = 0$$

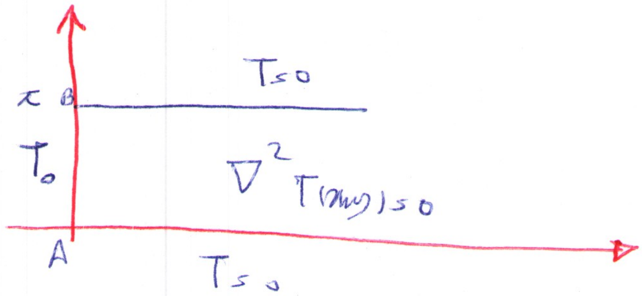
$$\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow v = \frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2T^*}{dv^2} = 0 \longrightarrow T^* = Av + B \longrightarrow \begin{cases} A(0) + B = T_0 \ , \ B = T_0 \\ A\left(\frac{\pi}{2}\right) + B = T_1 \rightarrow A = 2\,\frac{T_1 - T_0}{\pi} \end{cases}$$

$$T^*(u,v) = 2\left(\frac{T_1 - T_0}{\pi}\right) v + T_0$$

$$v = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$T(x,y) = 2\left(\frac{T_1 - T_0}{\pi}\right) tg^{-1}\frac{y}{x} + T_0$$



$W = \cosh z$

$$\rightarrow u + iv = \cosh(x+iy) = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x})\cos y}{2} + i\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}\sin y$$

$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$u = \cosh x \cos y$

$v = \sinh x \sin y$

عنوان | تاریخ | مرجع | صفحه

The Schwarz-Christoffel Transformation

نگاشت ~~نیم~~ فوقانی محورها به سمت یک چندضلعی

• اگر τ یک بردار واحدی که مماس بر یک منحنی C در نقطه z_0 با عدد مختلط t بیان کنیم

t: بردار واحد مماس بر منحنی C در نقطه z_0 در صفحه z

τ: 〃 〃 〃 〃 در Γ که نگاشت C در صفحه w در نقطه w_0 تحت نگاشت $w = f(z)$

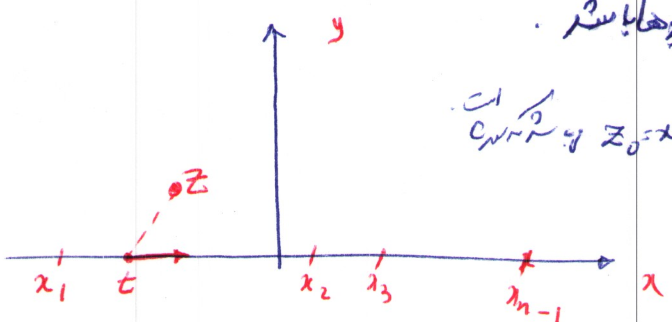
فرض کنید که تابع $w = f(z)$ تحلیلی و $f'(z_0) \neq 0$ باشد.

$$\arg \tau = \arg f'(z_0) + \arg t \quad , \quad \arg$$

$$\arg w'(t_1) = \arg f'(z_0) + \arg(z'(t_1))$$

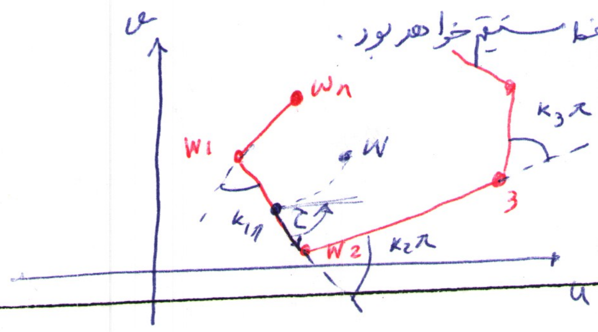
در حالت خاص فرض کنید C قسمتی از محورها باشد.

$t = 1$ ، $\arg t = 0$ در این صورت برای هر نقطه $z_0 = x$ به شکل C است



• لذا در صفحه w، $\arg \tau = \arg f'(x)$ (یعنی اگر $f'(z)$ یک arg ثابت ... $\arg \tau$ ثابت خواهد بود).

و تصویر Γ از منحنی C قسمتی از یک خط مستقیم خواهد بود.



حال می‌خواهیم نگاشتی بسازیم به فرم $w=f(z)$ که تمام محور xها را به پیرامون چندضلعی در صفحه w (مرحله)
نگاشت کند به طوری که x_1، x_2، ...، x_{n-1} و ∞ هستند نقاطی روی محور xها که تصویرشان در
صفحه w، گوشه‌های چندضلعی است و در اینجا

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$$

و نقاط گوشه‌های چندضلعی

$$W_n = f(\infty) \quad , \quad W_j = f(x_j) \quad (j=1,\dots,n-1)$$

حال تابع f به گونه‌ای است که $\arg f'(z)$ از یک مقدار ثابت در $z=x_j$ به مقدار ثابت دیگری می‌رسد در طول محور

حال اگر

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}$$

A: یک مقدار complex و k_j یک مقدار حقیقی است.

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1\arg(z-x_1) - k_2\arg(z-x_2) - \dots - k_{n-1}\arg(z-x_{n-1})$$

$z = x$ and $x < x_1$

$$\rightarrow \arg(z-x_1) = \arg(z-x_2) = \dots = \arg(z-x_{n-1}) = \pi$$

when $x_1 < x < x_2 \rightarrow \arg(z-x_1) = 0$ البقیه به طور ثابت π می‌شوند.

• ~~چون C در طول ... W ثابت می‌شود.~~

• تغییر $\arg f'(z)$ در گذر از یک نقطه به نقطه دیگر روی محور xها به اندازه $k_j\pi$ تغییر می‌کند، به اندازه ... .

• چون بر اساس C ثابت است در طول حرکت z از x_j تا x_{j+1}، w باید در جهت ... حرکت کند روی مسیری که خط راست است. که نسبت C با $k_j\pi$ تغییر می‌کند.

$k_j\pi$: زاویه‌ی خارجی یکی از رأس‌ها است که ... W

چون زوایای خارجی بین π و $-\pi$ تغییر می‌کند لذا $-1 < k_j < 1$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم ~~...~~ وجوه چندضلعی از خودشان همدیگر را قطع نمی‌کنند. و چندضلعی در راستای مثبت شبیه شده یعنی خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.

• مجموع زوایای خارجی یک چندضلعی بسته 2π می‌باشد. و لذا زاویه خارجی نقطه گوشه w_n که تصویر $z=\infty$ می‌باشد برابر زیر است

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1+\dots+k_{n-1})\pi$$

لذا اعداد k_j باید در شرایط زیر صدق کنند

$$k_1+k_2+\dots+k_{n-1}+k_n = 2 \qquad -1<k_j<1$$

$$\text{if} \quad k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=2 \longrightarrow k_n=0$$

در این حالت جهت C در w_n تغییر نمی‌کند لذا w_n یک گوشه نخواهد بود و چندضلعی $n-1$ ضلع دارد.

$$W = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{-k_{n-1}}\,dz + B$$

بنابراین اگر بخواهیم به دست آوریم ثابت‌های A و B از نقطه z_0 و مختلط معین استفاده می‌شود و

لذا مسئله کلی تعیین نیز مسائل مهم است.

theorem: let P be a polygon in the w plane with vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$ and exterior angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ where $-\pi < \alpha_k < \pi$. There exists a one-to-one conformal mapping $w = f(z)$ from the upper half plane $Im(z) > 0$ onto G that satisfies the boundary conditions,

$$w_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad w_n = f(\infty)$$

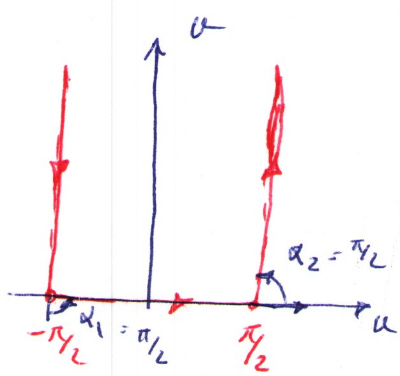
$$x_1 < x_2 < x_3, \dots < x_{n-1} < \infty$$

the derivative $f'(z) = A(z - x_1)^{-\alpha_1/\pi} \cdot (z - x_2)^{-\alpha_2/\pi} \dots (z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}/\pi}$

$$f(z) = B + A \int (z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\alpha_2/\pi} \dots (z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}/\pi} dz$$

A , B ثوابت هستند. با استفاده از نقاط دلخواه از x_1, x_n انتخاب شوند

مثال: نگاشتی پیدا کنید که صفحه بالایی z را به نوار $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$ نگاشت کند.



$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ w_1 = -\pi/2,\ w_2 = \pi/2$

$\rightarrow \alpha_1 = \pi/2,\ \alpha_2 = \pi/2$

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-\alpha_1/\pi} (z - x_2)^{-\alpha_2/\pi}$$

$$f'(z) = A[z - (-1)]^{-\frac{\pi/2}{\pi}} (z-1)^{-\frac{\pi/2}{\pi}}$$

$$= A(z+1)^{-1/2} (z-1)^{-1/2}$$

$= A(z^2 \dots)^{-1/2}$

$$f(z) = \int A(z^2-1)^{-1/2}\,dz + B = \int \frac{A}{(z^2-1)^{1/2}}\,dz + B$$

$$= A\,i\,\mathrm{Arcsin}\,z + B$$

$$\rightarrow f(-1) = -\pi/2 \quad , \quad f(1) = \pi/2$$

$$\rightarrow -\pi/2 = A.i.\mathrm{Arcsin}(-\pi/2) + B = -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}A + B$$

$$\pi/2 = A.i.\mathrm{Arcsin}(\pi/2) + B = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}iA + B$$

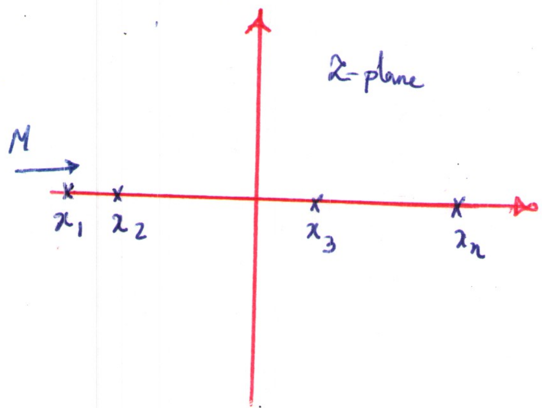
$$\rightarrow A = -i \;,\; B = 0$$

$$\rightarrow W = \mathrm{Arcsin}\,z$$

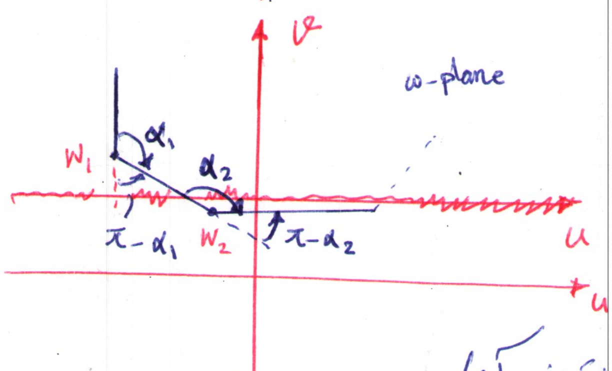
تبدیل شوارتز-کریستوفل Schwarz-Christoffel mapping

قبلاً دیدیم که در اثر یک تبدیل خطی کسری می‌توان نقاط فوقانی نیم صفحه را به نقاط داخل یک دایره تبدیل کرد.

تبدیل شوارتز کریستوفل نقاط فوقانی صفحه را به درون یک چندضلعی تبدیل می‌کند.



در صفحه z، نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را انتخاب می‌کنیم که سیر صعودی داشته باشد.



اکنون تبدیل چندضلعی زیر را در نظر می‌گیریم (تعریف می‌کنیم)

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\cdot(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \qquad (1)$$

α_iها زوایایی هستند که در صفحه تصویر بین اضلاع متوالی چندضلعی که رأس آنها w_i می‌باشد.

حال اگر از طرفین این رابطه انتگرال بگیریم

$$W = A\int_c^z (\xi-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\cdot(\xi-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(\xi-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}d\xi + B$$

A عدد مختلط است که با توجه به شرایط مسئله به دست می‌آید

C: نقطه دلخواهی است که از x_i ها می‌گذرد.

• برای تعیین زاویه خط مماس بر منحنی تصویر هنگامی که نقطه متحرک M از سمت چپ نقطه x_1 به سمت x_n در حرکت باشد داریم:

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \cdots (z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

$$\arg\frac{dw}{dz} = \arg A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\arg(z-x_1) + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\arg(z-x_n)$$

اگر M روی محور x ها سمت چپ نقطه x_1 باشد

$$\arg\frac{dw}{dz} = \arg A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\pi + \left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)\pi + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\pi$$

وقتی که نقطه M از x_1 گذشت.

$$\arg\frac{dw}{dz} = \arg A + 0 + \left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)\pi + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\pi$$

تغییر $\arg\frac{dw}{dz}$ به اندازه $(\alpha_1-\pi)$ کاهش یافته است، تغییر زاویه خط مماس به اندازه $(\pi-\alpha_1)$ زیاد شده است.

به همین ترتیب وقتی که نقطه M از نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ گذشت در هر مرتبه زاویه خط مماس به اندازه $\pi-\alpha_i$ زیاد می‌شود که این خود مؤید این نکته است که تبدیلی که به دست آمده در رابطه (1) تعریف کرده‌ایم تبدیلی است که نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به نقاط $w_1, \dots, w_n$ که رئوس یک چندضلعی هستند تبدیل کند.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

* تبدیل در مورد چند ضلعی بسته:

(از هندسه مسطحه یادتان هست)

• مجموع زوایای خارجی یک چند ضلعی محدب برابر 2π می‌باشد. به شرط اینکه کثیر الاضلاع

محدب و بسته باشد پس:

$$(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+\cdots+(\pi-\alpha_n)=2\pi$$

$$\left(1-\frac{\alpha_1}{\pi}\right)+\left(1-\frac{\alpha_2}{\pi}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\alpha_n}{\pi}\right)=2$$

حال اگر در رابطه ① مقدار

$$A=\frac{k}{(-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}}$$

در نظر بگیریم:

$$\frac{dw}{dz}=k(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\cdot(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots\left(\frac{-z+x_n}{x_n}\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

اگر

$$x_n\to\infty \longrightarrow \left(\frac{-z+x_n}{x_n}\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\longrightarrow 1$$

بنابراین برای تبدیل چند ضلعی که نقطه x_n در بی‌نهایت تعریف شود ① به یک فاکتور کمتر می‌نویسیم:

$$\frac{dw}{dz}=k(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\cdots(z-x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1}$$

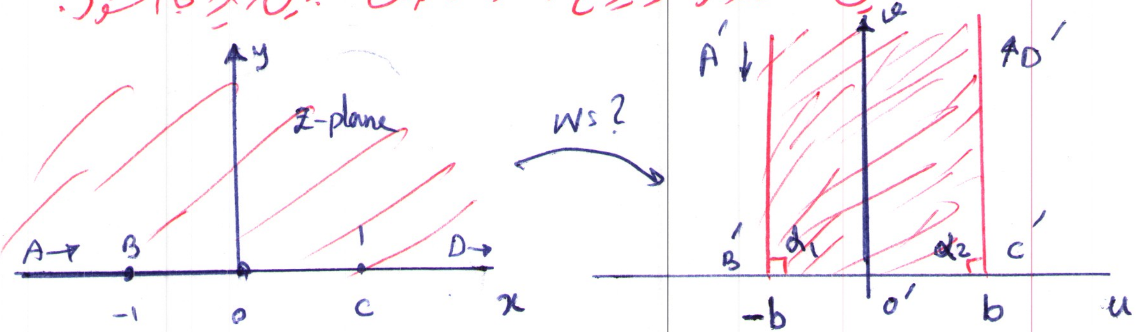
و

$$W=k\int_c^z(\xi-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\xi-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(\xi-x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1}d\xi+B$$

که ضرایب k و B توسط شرایط داده شده به دست می‌آیند.

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

مثال مطلوبست تبدیل شوارتز کریستوفل که در اثر آن تبدیل زیر انجام شود.



$$\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{dw}{dz}=A(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}$$

$$\frac{K}{(-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}}=\frac{iK}{(-1)^{-1/2}}$$

$$=A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}=A(z^2-1)^{-1/2}=\frac{-iA}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$=-iA(z^2+1)^{-1/2}=K(1-z^2)^{-1/2}=\frac{K}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\left(1-\frac{\alpha_1}{\pi}\right)+\left(1-\frac{\alpha_2}{\pi}\right)+\left(1-\frac{\alpha_3}{\pi}\right)=2 \quad (1)$$

$$dw=\frac{K\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\rightarrow W=K\sin^{-1}z+B$$

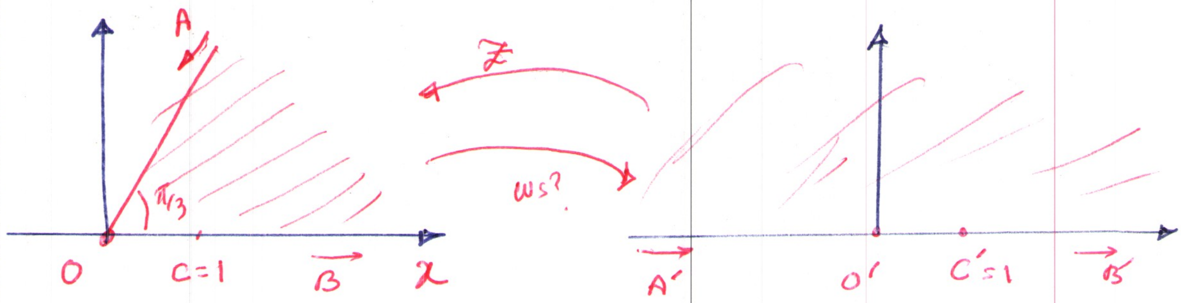
نقطه O $\{z=0 \longrightarrow$ نقطه O' $\{W=0 \rightarrow 0=K\sin^{-1}0+B\rightarrow B=0$

نقطه B $\{z=-1 \longrightarrow$ نقطه B' $\{W=-b \rightarrow \frac{2b}{\pi}=K$

$$W=\frac{2b}{\pi}\sin^{-1}z$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

مطلوبست محاسبه تبدیل W که ناحیه زیر را تبدیل به ناحیه نیمصفحه بالا کند.



• می‌توانیم ابتدا از صفحه W به Z برویم و تبدیل $Z=f(w)$ را پیدا کنیم و سپس تحت عکس تبدیل آن Z به صفحه W برسیم.

$$\frac{dZ}{dW} = A(\cancel{Z}W - 0)^{\frac{\pi/3}{\pi}-1} = AW^{-2/3} = kW^{-2/3}$$

$$A = \frac{k}{(-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}} = k$$

$$Z = \int kW^{-2/3}\,dw + B = kW^{1/3} + B$$

$$Z = kW^{1/3} + B \longrightarrow C \rightarrow C' \longrightarrow \begin{matrix} W=1 \\ Z=1 \end{matrix} \rightarrow K=1$$

$$O \rightarrow O' \longrightarrow B=0$$

$$Z = W^{1/3}, \quad \boxed{W = Z^3}$$