بسمه تعالی

دانشگاه سمنان
دانشکده مهندسی مکانیک

دست نوشته های درس

"ریاضی مهندسی"

مدرس:

دکتر محمد صادق ولی پور

اردیبهشت ماه ۱۳۹۹

line Integral in the Complex Plane.

Complex definite integral are called complex line integral,

$$\int_C f(z)\,dz$$ در فضای اعداد مختلط . انتگرال توابع مختلط را انتگرال منحنی الخط هستند

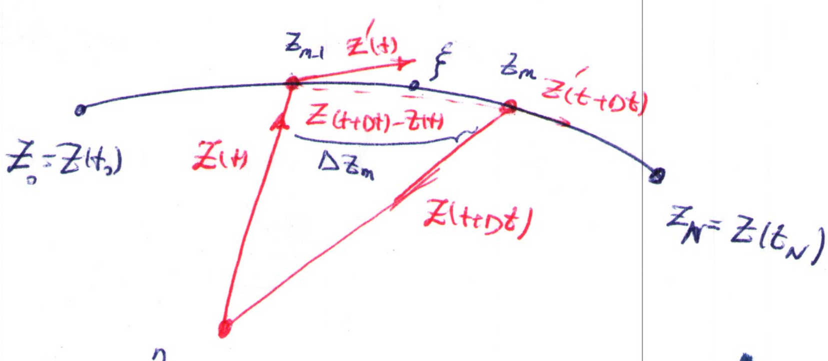
که integrand ، $f(z)$ می‌باشد و C مسیری که روی آن انتگرال گیری می‌شود.

C : مسیر انتگرال گیری گویند.

$$C:\quad Z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad a \le t \le b$$

اگر C یک منحنی هموار smooth باشد یعنی پیوسته و $Z'(t)$ موجود باشد.

$$Z'(t) = \frac{dZ}{dt} = x'(t) + i\,y'(t) \neq 0$$



$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\xi_m)\,\Delta Z_m \qquad , \Delta Z_m = Z_m - Z_{m-1}$$

$\Delta Z_m \longrightarrow \infty$ و تعداد تقسیمات بی‌نهایت گرفته شود.

$$\lim_{\Delta Z_m \to \infty} S_n = \int_C f(z)\,dZ$$ به آن انتگرال خطی در مسیر C گویند.

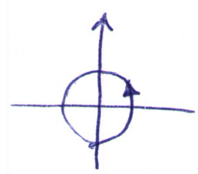
Use of a representation of a path.

قضیه: let C be a piecewise smooth path, represented by $z = z(t)$, where $a \le t \le b$, $f(z)$ be a continuous function on C, then,

$$\int_{C=z(t)} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f[z(t)]\,z'(t)\,dt\ , \quad z' = \frac{dz}{dt}$$

Example $\quad I = \oint_C \frac{1}{z}\,dz$

دایره یکه: C unit circle



$$z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z'(t) = (e^{it})' = i e^{it}$$

$$\rightarrow \oint \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it}\,dt = \boxed{2\pi i}$$

$$L = \oint_C (z - z_0)^m\,dz \qquad ? \ge m$$

C: دایره به مرکز z_0 و شعاع r

$$z - z_0 = re^{it} \rightarrow z = z_0 + re^{it} \Rightarrow dz = rie^{it}\,dt$$

$$I = \int r^m e^{imt} \cdot r i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} r^{m+1} e^{i(m+1)t} = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt$$

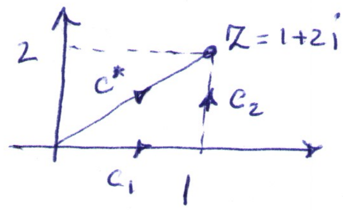
صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

لورانیه

Complex line integrals ~~that~~ not only depends on the endpoints but also on ~~then~~ the path itself.

$f(z) = \mathrm{Re}\, z = x$ from 0 to $1+2i$ a) along C^*

b) along $C_1 + C_2$



$z(t) = t + 2it \quad (0 \leq t \leq 1) \rightarrow z'(t) = 1+2i$

$$\int_{C^*} \mathrm{Re}(z)\, dz = \qquad f[z(t)] = x(t) = t$$

$$= \int_0^1 t(1+2i)\, dt = \frac{1}{2}(1+2i) = \underline{\frac{1}{2} + i}$$

b:

$z(t) = t \quad , \quad z'(t) = 1 \quad f(z(t)) = x(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1$

$z(t) = 1+it \quad z'(t) = i \quad f(z(t)) = x(t) = 1 \quad , \ 0 \leq t \leq 2$

$$\rightarrow \int_C \mathrm{Re}(z)\, dz = \int_{C_1} \mathrm{Re}\, z\, dz + \int_{C_2} \mathrm{Re}\, z = \int_0^1 t\, dt + \int_0^2 i\, dt = \boxed{\frac{1}{2} + 2i}$$

چون تابع تحلیلی نیست لذا انتگرال آن در هر مسیر یکسان نیست.

Bounds of Integral

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$$

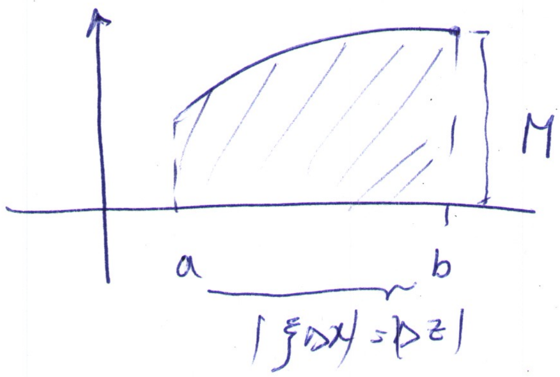
M : بیشترین مقدار تابع L ، طول مسیر.

proof:

$$\left|\sum f(\xi_m)\,\Delta z_m\right| \leqslant \sum |f(\xi_m)|\,|\Delta z_m| = M\sum|\Delta z_m| = ML$$

که بیشترین مقدار تابع

در بدترین شرایط $|\Delta z_m|$ اندازه طول تابع است.

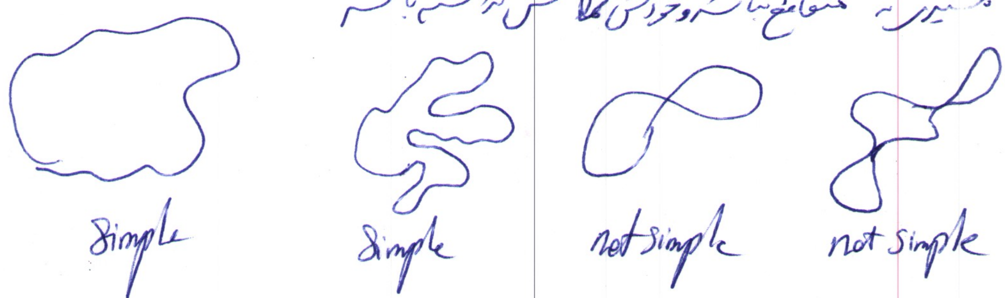


حوزه همبند ساده:

1. Simple Closed path:

حوزه

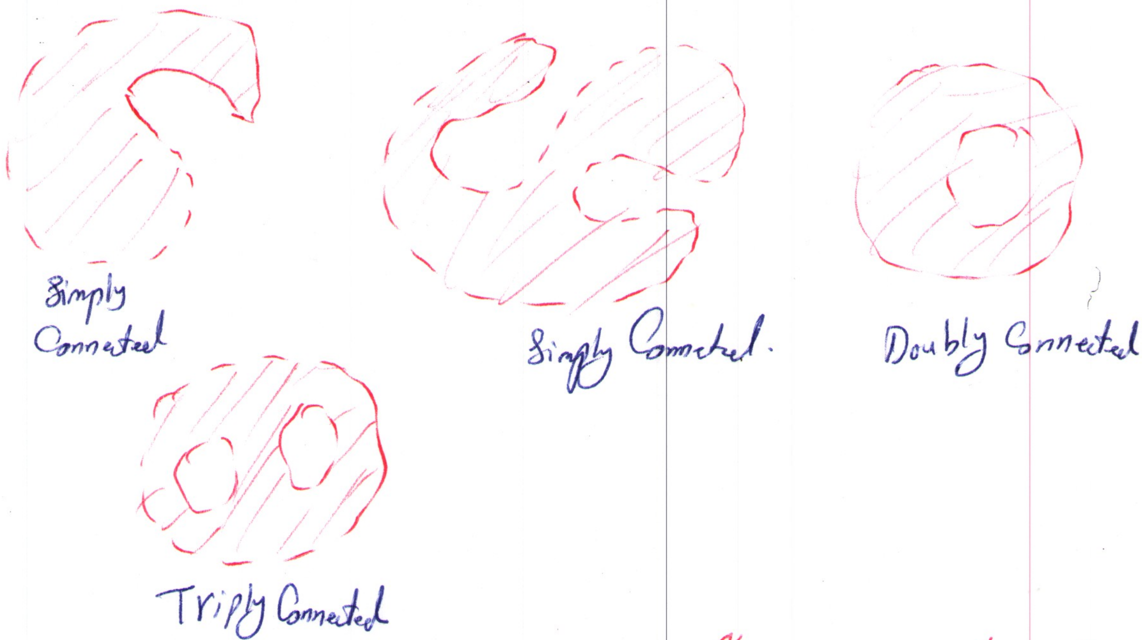
مسیری که متقاطع نباشد و خودش تماس نداشته باشد



2. A Simply Connected domain:

حوزه همبند ساده، حوزه‌ای است که هر مسیر بسته دلخواه در آن انتخاب شود، نقاطی را شامل می‌گردد که باز هم در حوزه هست. را حوزه همبند ساده گویند.

وغیر از این را حوزه همبند چندگانه "multiply Connected"

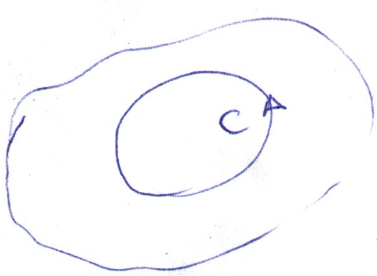


"Cauchy-Goursat" قضیه کوشی-گورسا

if $f(z)$ is analytic in a simply connected domain D, then for every simple closed path C in D

$$\oint f(z)\,dz = 0$$

$$\oint f(z)dz = \oint (u+iv)(dx+idy) = \oint (udx-vdy) + i\oint (vdx+udy)$$



قضیه گرین

$$\boxed{\oint (fdx+gdy) = \iint \left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy}$$

$$\oint (udx-vdy) = \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

$$i\oint (vdx+udy) = i\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\oint_C e^z\,dz = 0 \qquad \oint_C \cos z\,dz = 0, \qquad \oint_C z^n\,dz = 0$$

توابع تام که در تمام صفحه z تحلیلی اند لذا انتگرال آنها حول هر منحنی بسته صفر می باشد.

$$\oint \sec z\,dz = 0, \qquad \oint \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

برای ... خارج نقاط تکین [illegible] صفر است

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

$$\oint_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}\, i e^{it}\, dt = 2\pi i$$

$C: e^{it} = z(t)$ در نظر بگیرید

چون تحلیلی نیست.

$$\oint \frac{dz}{z^2} = 0$$

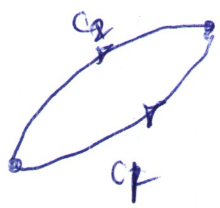
C: unit circle

این تابع $\frac{1}{z^2}$ در $z=0$ تحلیلی نیست ولی انتگرال صفر است!

پس بنابراین تحلیلی بودن شرط کافی است ولی لازم نیست برای قضیه کوشی

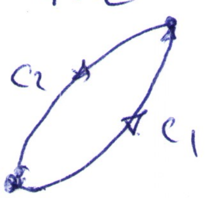
نکته

نکته: اگر $f(z)$ بین C_1 و C_2 در ناحیه‌ای تحلیلی شد

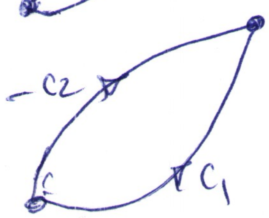


$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = 0 \longrightarrow \int_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

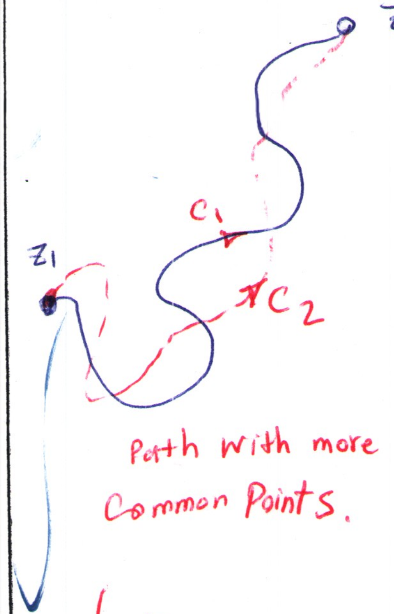


$$\oint_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz = 0$$

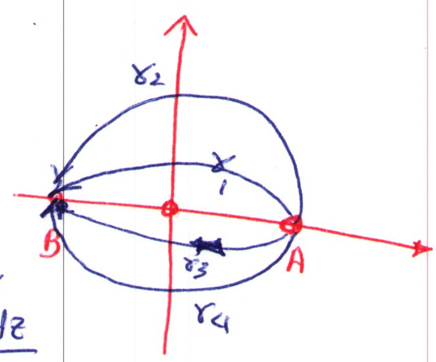


$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-C_2} f(z)dz$$

Theorem: if $f(z)$ is analytic in a simply connected domain D, then the integral of $f(z)$ is independent of Path in D



$$\int \frac{dz}{z} = ?$$

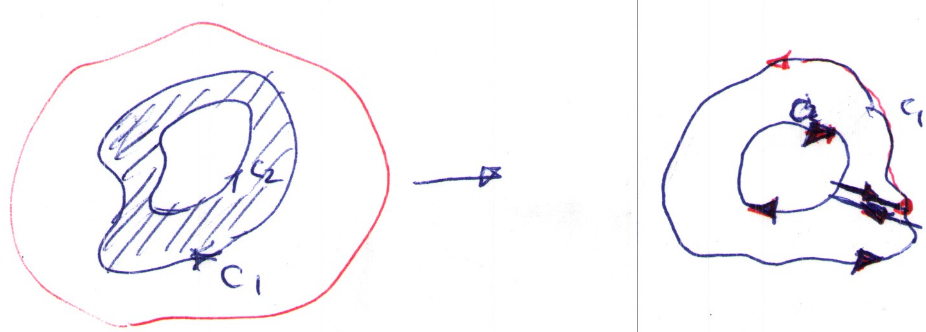


$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \neq \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_4} \frac{dz}{z}$$

نکته ۳- اگر ~~f(z)~~ ~~در ناحیه D تحلیلی باشد~~ و c_1 و c_2 دو مسیر ساده بسته باشند

که بسته هستند در D بدانیم همبست $f(z)$ بین c_1 و c_2 در بین آنها تحلیلی است $\oint_{c_2} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz$ (اصل تغییر شکل)

Priciple of deformation.



$$\int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

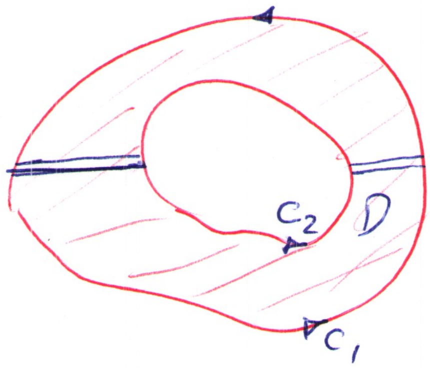
اگر پهنای شکاف‌ها را به سمت صفر میل دهیم

$\int f(z)dz \quad \int f(z)dz \quad \int f(z)dz$

عنوان | تاریخ | مرجع | صفحه

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \longrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

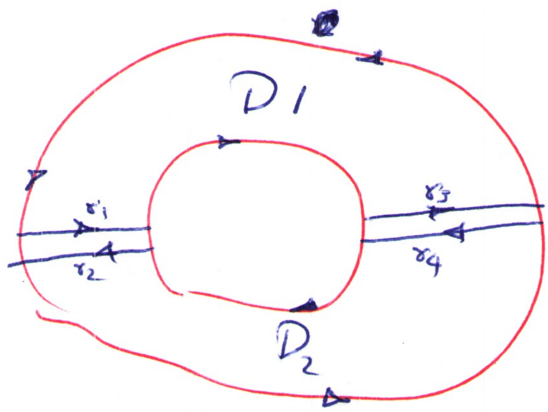
انتگرال کوشی برای



اگر f در ناحیه D پیوسته و تحلیلی باشد

می‌توانیم ادعا کنیم که

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$



$$\int_D f(z)\,dz = \int_{D_1} f(z)\,dz + \int_{D_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2+\gamma_3} f(z)\,dz$$

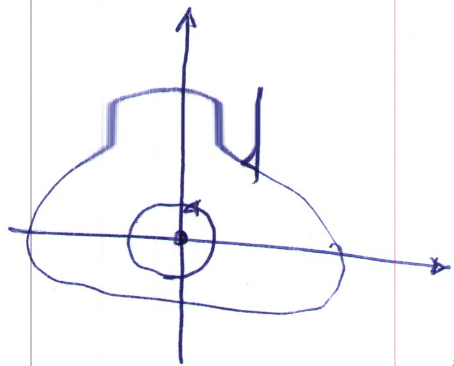
$$\int_{\gamma_2+\gamma_3} = 0 \quad , \quad \int \gamma_1+\gamma_2 = 0$$

دقت شان به سمت صفر میل می‌کنند

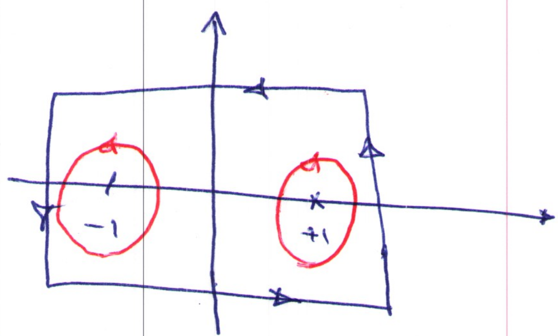
$$\oint_{C_1} f\,dz = \oint_{C_2} f\,dz$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$\oint \frac{dz}{z} \quad \text{بیضی} \qquad , \qquad \oint \frac{dz}{z} \quad \text{دایره}$$



$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = ?$$



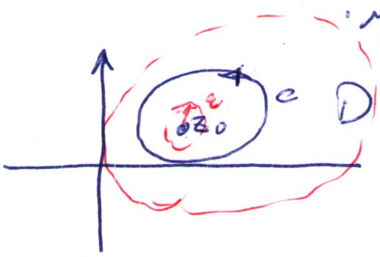
$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} + \frac{-1/2}{z+1}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{C_{+1}} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_{C_{-1}} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times 2\pi i = 0$$

دستور انتگرال کوشی "Cauchy's Integral Formula"

اگر $f(z)$ در حوزهٔ همبند D تحلیلی باشد و z_0 نقطه‌ای از حوزه بوده و C مسیر بسته‌ای باشد که z_0 را در حوزه D دور بزند:



در اینصورت

$$\oint \frac{f(z)}{}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

proof:

$$f(z) = f(z_0) + \left[f(z) - f(z_0)\right]$$

$$\rightarrow \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} + \oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)\oint \frac{dz}{z-z_0} + \underbrace{\oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{K}$$

$$= 2\pi i \times f(z_0) + K$$

حال نشان می‌دهیم که K برابر با صفر است.

$f(z)$ در D تحلیلی است پس پیوسته است لذا به ازای هر ε دلخواه و کوچک عدد مثبت δ پیدا می‌شود به طوری که در داخل دیسک $|z-z_0|<\delta$ داشته باشیم

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

$$\oint \frac{\overset{\varepsilon}{|f(z)-f(z_0)|}}{\underset{\rho}{|z-z_0|}}\,dz = \left|\oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\times 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

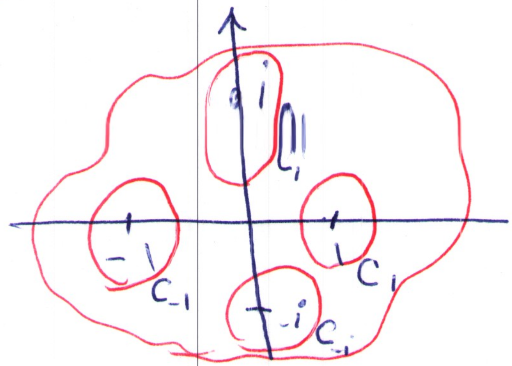
ε را می‌توان به طور دلخواه به صفر نزدیک کرد پس انتگرال هم مقدار به صفر نزدیک می‌شود.

در غیر اینصورت به ازای هر ε، ε دیگری می‌توان یافت که کوچکتر از ε باشد.

لذا پس تنها صفر است که عدد کوچکتری از آن نداریم.

حل:

$$\int_C \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right) dz = \frac{\cancel{Az^2+bz+c}}{z-1}$$



$$C_1: \oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \oint \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)_{z=1} = 2\pi i$$

$$C_{-1}: \oint_{C_{-1}} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \oint_{C_{-1}} \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)_{z=-1} = -2\pi i$$

$$C_i: \oint_{C_i} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = 0$$

$$C_{-i}: \oint_{C_{-i}} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = 0$$

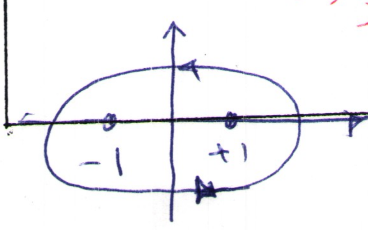
تابع تحلیلی است بنابراین

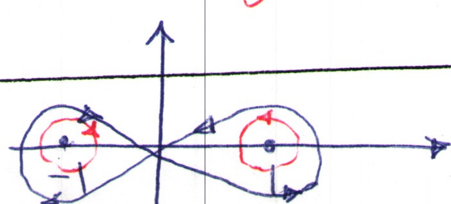
$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i \left(e^z\right)_{z=1} = 2\pi i e$$

C_1 دایره به مرکز $z=1$

انتگرال $\int \frac{dz}{z^2-1}$ را با استفاده از دو مسیر زیر پیدا کنید.





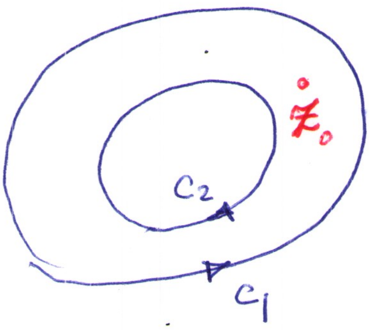
$$\oint \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{z+1}\right)\Bigg|_{z=1} = \pi i$$

$$= 0$$

$$\oint \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=-1} = -\pi i$$

انتگرال کوشی برای یک ناحیه همبند چندگانه

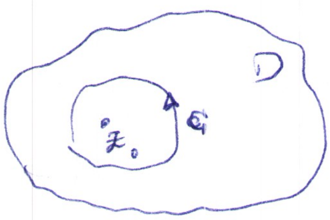
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



مشتق توابع تحلیلی "Derivatives of analytic Function"

قضیه: اگر $f(z)$ در حوزهٔ همبند ساده D تحلیلی باشد و z_0 در حوزهٔ D بوده و C نقطهٔ z_0 را دور بزند

در اینصورت ~~[illegible]~~ همه مشتقات مرتبه nام این تابع در D موجود و تحلیلی اند و بصورت زیر میباشند:



$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n=1,2,\dots)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{z}}{(z-1)^4}\,dz = ?$$

$$\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$n+1=4 \rightarrow n=3$
$z_0=1$

$$\rightarrow \oint \frac{e^{z}}{(z-1)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} \times (e^{z})'''_{z_0} = \frac{2\pi i\, e}{3!} = \boxed{\frac{\pi e i}{3}}$$

اثبات قضیه از طریق استقرای ریاضی:

$\Delta z = z - z_0$

ابتدا آن را برای $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim \frac{1}{\Delta z}\left[f(z_0+\Delta z) - f(z_0)\right]$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta z} \times \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right] \leftarrow$$ z و Δz سیستم مختلط:

$$= \lim \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left[\oint_C \left[\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{(z-z_0)}\right] f(z)\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz + \lim \frac{\Delta z}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,dz$$

و حالا نشان می‌دهیم که ترم دوم برابر صفر است.

$$\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{z-z_0-\Delta z} - \frac{1}{z-z_0}\right) = \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}$$

قضیه: Morera: عکس قضیه کوشی

اگر $f(z)$ در حوزه همبند ساده D پیوسته باشد و C یک مسیر دلخواه بسته در D باشد و $\oint_C f(z)\,dz = 0$ باشد آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

نامساوی کوشی:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

اگر دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع R داشته باشیم در اینصورت نامساوی زیر را داریم:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi i}\left|\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,M}{r^{n}} \leftarrow$$ نامساوی کوشی

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2}\,dz = ?$$

C including point πi

$$\rightarrow \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = 2\pi i\, f^{(n)}(z)$$

$$\rightarrow n+1=2 \rightarrow n=1 \rightarrow \int \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2}\,dz = 2\pi i\,(\cos z)'\Big|_{\pi i} = -2\pi i \sin \pi i$$

$$= 2\pi \sinh \pi$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi i\, \frac{e^z(z^2+4)-2ze^z}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{6e\pi}{25} i \simeq 2.050\, i$$

"Liouville's theorem" قضیه لیوویل

If an entire function is bounded in absolute value in the whole Complex plane, then this function must be a Constant.

اگر $f(z)$ در تمام صفحه کراندار و تحلیلی باشد، مقداری ثابت است.

Proof:

$|f(z)|$ is bounded $\rightarrow |f(z)| < K$ for all z,

$$|f'(z_0)| < \frac{K}{r}$$

با حالت خاص $n=1$

r را به طور دلخواه زیاد می‌کنیم.

Since $f(z)$ is entire $\longrightarrow$ this holds for every r, so that we can take r as much as we can $\rightarrow f'(z_0) \rightarrow 0$

$f' = u_x + iv_x = 0 \rightarrow u_x = v_x = 0$ چون z_0 یک نقطه دلخواه است لذا

$\downarrow$

از معادلات کوشی-ریمان

$v_y = u_y = 0 \longrightarrow f = u + iv = \text{Const.}$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

"Sequences & Series": دنباله‌ها و سری‌ها

دنباله‌ها: اگر به هر عدد ۱، ۲، ۳، ... به ترتیب یک عدد مختلط $z_1, z_2, \ldots$ نسبت دهیم

یک دنباله خواهیم داشت. $z_1, z_2, \ldots$ or $\{z_1, z_2, \ldots\}$ or $\{z_n\}$

$z_n = \frac{1}{n} + \frac{i^2}{n} =$ به این یک دنباله گویند.

z

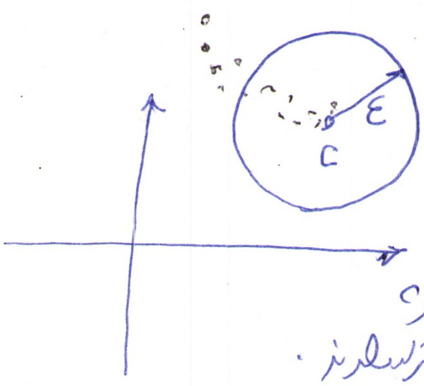
یک دنباله حقیقی دنباله‌ای است که تمام ترم‌های آن حقیقی باشد.

دنباله همگرا "A Convergent Sequence"

$\lim_{n\to\infty} z_n = c$ or $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$

دنباله‌ای که به ازای هر عدد کوچک ε بتوان یک عدد بزرگ مانند N پیدا کرد به طوری که

برای $n>N$ داشته باشیم $|z_n - c| < \varepsilon$



بزرگ c

یعنی همه ترم‌های z_n به ازای $n>N$ داخل دیسکی به شعاع ε قرار دارند.

یعنی تعداد نقاط خارج دایره هر چند کوچک زیاد است.

$z_n = 1 + \frac{1}{n} + i\left(2 + \frac{2}{n}\right)$

$\left|z_n - (1+i2)\right| = \left|1 + \frac{1}{n} + i\left(2+\frac{2}{n}\right) - 1 - 2i\right| = \left|\frac{1}{n} + i\frac{2}{n}\right| = \left|\frac{\sqrt{5}}{n}\right| < \varepsilon$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

قضیه: یک مجموعه دنباله $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ یا $\{z_n = x_n + i y_n\}$ به $c = a+ib$ همگرا می‌شود اگر و فقط اگر قسمت حقیقی آن (دنباله) $\{x_n\}$ به a و دنباله قسمت مجازی آن $\{y_n\}$ به b همگرا شود.

سری "Series"

$s_1 = z_1 \qquad s_2 = z_1 + z_2 \quad , \quad s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$

به اینها گوییم جمع جزئی جملات "Partial sum" از یک سری می‌گویند.

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots$$

سری $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ همگراست اگر جمع جزئی جملات آن همگرا باشد یعنی

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad S = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots$$

$$S = S_n + R_n$$

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} z_m = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

$$R_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} z_m = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$$

R_n: باقیمانده سری بعد از ترم z_n : Remainder

$R_n = S - S_n$

$$\text{if } \lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

آزمون‌های همگرایی سری‌ها

قضیه: اگر سری $z_1+z_2+\dots$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$ بنابراین اگر این شرایط صدق نکند سری همگرا نیست.

دقت شود: که $z_m \to 0$ فقط شرط لازم است ولی کافی نیست چرا؟

$$z_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

که وقتی $n\to\infty$ میرود $z_n \to 0$ میل میکند ولی سری همگرا نیست!

همگرایی مطلق: "Absolute Convergence"

سری $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ بطور مطلق همگراست اگر $\sum_{m=1}^{\infty} |z_m|$ همگرا باشد.

اگر سری $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ همگرا باشد ولی $\sum_{m=1}^{\infty} |z_m|$ واگرا باشد گوییم سری $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ به صورت مشروط همگراست "Conditional Convergent"

تست مقایسه "Comporsion Test"

قضیه

if a Series $z_1+z_2+\dots$ is given and we can find a Convergent series $b_1+b_2+\dots$ with nonnegative real Terms such that $|z_1|\le b_1, |z_2|\le b_2, \dots$ then the given seris Converges, even absoluty.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \xrightarrow{\text{همگراست}} b_{n+1}+\dots+b_{n+p} < \varepsilon \quad \text{for every } n>N \qquad p=1,2,\dots$$

$$|z_1|\le b_1, |z_2|\le b_2 \dots$$

همگراست ،

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

theorem: the geometric series

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \dots$$

Converges with the sum $\frac{1}{1-q}$ if $|q|<1$

and diverges if $|q| \geq 1$

آزمون نسبت:

if a series $z_1 + z_2 + \dots$ with $z_n \neq 0$ $(n=1,2,\dots)$ is such that ~~has the property that for~~:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$$

$L < 1 \longrightarrow$ Converges absolutely سری همگراست

$L > 1 \longrightarrow$ the series diverges سری واگراست

$L = 1$ با این روش نمی‌توان اظهار نظر کرد.

آزمون ریشه:

if a series $z_1 + z_2 + \dots$ is such that $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ then:

$L < 1 \longrightarrow$ the series Converges absolutely

$L > 1 \longrightarrow$ " " divergences

$L = 1 \longrightarrow$ the Test fails; با این روش نمی‌توان اظهار نظر کرد.

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

سری توانی:

سری های توانی مهمترین سری ها در آنالیز اعداد مختلط می باشند زیرا ما خواهیم دید که مجموع آنها توابع تحلیلی اند و هر تابع تحلیلی را میتوان بصورت سری نوشت.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

a_0 و a_1 و a_2 ... اعداد مختلط یا حقیقی هستند که به آن ضرایب سری گویند.

z_0 را مرکز سری گویند

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

همگرایی سری توانی:

$$\sum_{0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

if $|z|<1 \to$ it converges absolutely, $|z| \geq 1$ it diverges.

بنابراین $|z|<1$ ناحیه همگرایی سری می باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\lim \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{z^n z}{(n+1)n!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 < 1$$

بر روی تمام صفحه بطور مطلق همگراست ← همگراست.

$$\sum n!\, z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

$$\lim \left| \frac{(n+1)!\, z^{n+1}}{n!\, z^n} \right| = \lim |(n+1) z| = \begin{cases} 0 & z=0 \\ \infty & z \neq 0 \end{cases}$$

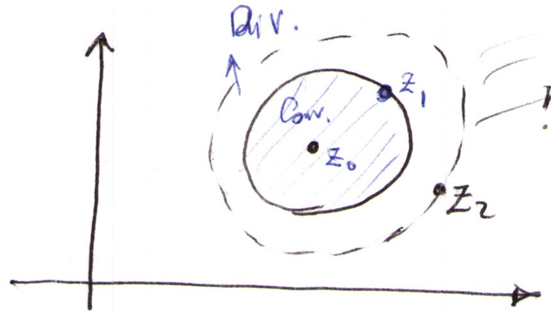
فقط در مرکز همگراست.

قضیه همگرایی سری توانی:

فرض می‌کنیم سری توانی $\sum a_n(z-z_0)^n$ [illegible] در $z=z_1\neq z_0$ همگرا باشد

در این صورت سری برای تمام نقاط مانند z که در آن $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ باشد

به طور مطلق همگرا است.



نکته: هر سری توانی در مرکز سری همگرا است. $z=z_0$ همگرا است

اگر سری در $z=z_2$ واگرا شود آنگاه به ازای تمام zهای بزرگتر از z_2 واگرا می‌شود.

$$\text{For } z=z_0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \boxed{a_0} \quad ✓$$

$$\text{For } z=z_1 \text{ it Converges} \longrightarrow a_n(z_1-z_0)^n \longrightarrow 0 \qquad n\longrightarrow\infty$$

$$\rightarrow \left|a_n(z_1-z_0)^n\right| \le M$$

$\sum a_n(z-z_0)^n$ را در $a_n(z_1-z_0)^n$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$\left|a_n(z-z_0)^n\right| = \left|\underbrace{a_n(z_1-z_0)^n}\cdot\frac{a_n(z-z_0)^n}{a_n(z_1-z_0)^n}\right| = \left|a_n(z_1-z_0)^n\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right| \le M\sum\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n, \quad \text{if } |z-z_0|<|z_1-z_0|$$

$$\sum\left|a_n(z-z_0)^n\right| < M \qquad \rightarrow \left|\frac{z-z_0}{\cdots}\right| < 1$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

دایره همگرایی یا شعاع همگرایی "Radius of Convergence"

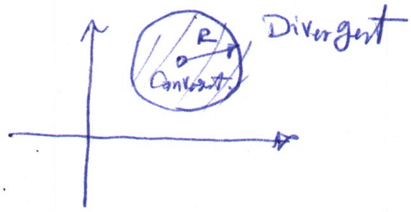
سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ را در نظر بگیرید. اگر دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R در نظر بگیرید که اگر داخل دایره، سری همگرا و برای نقاط بیرون آن سری واگرا باشد دایره حاصل دایره بالا را دایره همگرایی گویند. و به شعاع R نیز شعاع همگرایی گویند.

روی دایره ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد.

$|z-z_0| = R \rightarrow$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد

$|z-z_0| < R \rightarrow$ سری همگرا

$|z-z_0| > R \rightarrow$ سری واگرا



if $R = \infty \longrightarrow$ the series converges for all "z"

if $R = 0 \longrightarrow$ " " " at the center $z = z_0$

تعیین شعاع همگرایی

فرض می‌کنیم سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ داده شده است. دنباله $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ را در نظر می‌گیریم که همگرا به حد L^* است. در این صورت شعاع همگرایی سری $R = \frac{1}{L^*}$ می‌باشد.

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \begin{cases} 0 \longrightarrow L^* \to \infty \\ \infty \longrightarrow L^* \to 0 \end{cases}$$

$0 \longrightarrow L^* \to \infty$: سری فقط در نقطه $z=z_0$ همگراست

$\infty \longrightarrow L^* \to 0$: سری در همه نقاط همگراست

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

proof:

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^{n}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-z_0| = L$$
$$n \to \infty$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L^*$$

$$\to L^*|z-z_0| = L < 1$$

شرط همگرایی

$$L^* \neq 0 \to |z-z_0| < \frac{1}{L^*}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$$

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)![(n+1)!]^2}{(n!)^2(2n+2)!}\right|$$

$$= \lim\left[\frac{\cancel{2n!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}\cdot\frac{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(n!)^2}}\right] = \lim\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

بنابراین این سری در دیسک باز $|z-3i| < \frac{1}{4}$ همگراست.

نکته: شعاع همگرایی را می‌توان با ضابطه زیر نیز بدست آورد.

$$L^{**} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \to R = \frac{1}{L^{**}}$$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

اگر یک سری ... باشد، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R \neq 0$ باشد، می‌توان نوشت: (درون شعاع همگرایی)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

نکته: یک تابع $f(z)$ نمی‌تواند بوسیله دو سری مختلف با یک مرکز بیان شود.

قضیه: اگر یک تابع $f(z)$ بتواند بیان شود بوسیله یک سری توانی با شعاع همگرایی $R>0$ آنگاه $f(z)$ در $z=0$ پیوسته است.

• اگر دو سری توانی با شعاع همگرایی R_1 و R_2 باشند، می‌توان آنها را جمله به جمله جمع و تفریق کرد که سری حاصل حداقل با کوچکترین شعاع همگرایی R_1 و R_2 همگرا خواهد بود.

حاصلضرب دو سری: (ضرب کوشی دو سری)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1 z + \dots$$

از ضرب کوشی دو سری در ناحیه‌ای که هر دو سری همگرا هستند می‌توان استفاده کرد.

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_m z^{k+m} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \dots$$

نتیجه: می‌توان در داخل ناحیه همگرایی از سری توانی جمله به جمله مشتق گرفت که سری حاصل دارای شعاع همگرایی سری اصلی می‌باشد.

$$\sum_{n=0} a_0 z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_0 n z^{n-1}$$

نتیجه: می‌توان در داخل ناحیه همگرایی از سری توانی جمله به جمله انتگرال گرفت که ~~...~~ سری حاصل دارای شعاع همگرایی سری اصلی باشد.

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \dots$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

معنی: سری توانی در داخل دایره همگرایی خود یک تابع تحلیلی است. (به شرطی که شعاع همگرایی آن صفر نباشد)

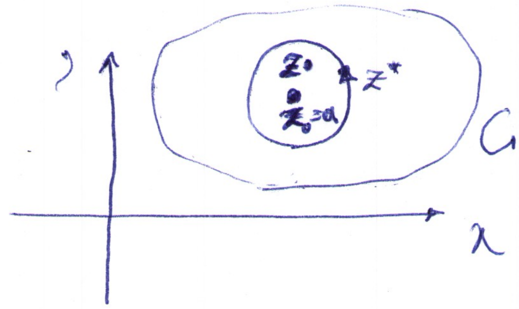
بسط تیلور" سری تیلور"

فرض کنیم که $f(z)$ در همسایگی $z_0=a$ تحلیلی باشد در اینصورت می‌توان آن را حول z بسط تیلور داد.

سری تیلور حقیقی $= f(x+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$

if $x_0 = 0 \rightarrow$ بسط مکلورن (Maclaurin Series"

proof:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z)}\,dz^* = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{(z^*-a)-(+z-a)}\,dz^*$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)\,dz^*}{(z^*-a)\left(1-\frac{z-a}{z^*-a}\right)} \qquad \left|\frac{z-a}{z^*-a}\right| < 1$$

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{z^*-a}} = 1 + \frac{z-a}{z^*-a} + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \qquad |q|<1$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)\,dz^*}{(z^*-a)\left[1+\frac{z-a}{z^*-a}+\frac{(z-a)^2}{(z^*-a)^2}+\cdots\right]^{-1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{(z^*-a)}\left[1+\frac{z-a}{z^*-a}+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2\cdots\right]dz^*$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{z^*-a}\,dz^* + \frac{z-a}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}\,dz^* + \cdots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,dz^* + \cdots$$

$$\rightarrow f(z) = f(a) + (z-a)\,\frac{f'(a)}{1!} + \cdots + (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \cdots$$

بنابراین $f(z)$ در همسایگی $z_0 = a$ تحلیلی باشد در اینصورت می‌توان $f(z)$ را حول a بسط تیلور داد

و حاصل آن یک سری توانی منحصر بفرد است

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad , \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,dz^*$$

if $a=0 \rightarrow$ Maclaurin Series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad , \quad b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

مثال: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $\quad |z|<1$ تحلیلی است.

در حول $z=0$ بسط دهید:

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \rightarrow f'(z)\Big|_{z=0} = 1 \qquad f''(z) = \frac{-2(-1)(1-z)}{(1-z)^3}\Big|_{z=0} = 2 \; , \; \ldots \; f^{(n)}(z) = n!$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$f(z) = e^z =$ حول هر نقطه دلخواه می‌توان بسط داد چون یک تابع تام است.

$$f'(z) = e^z \, , \; f''(z) = e^z \; \cdots \; f^{(n)}(z) = e^z$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

93

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$f(z)=e^{z}=e^{z-1}\cdot e=e\left(1+\frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n y^n}{n!}=1+i\frac{y}{1!}-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\cos y+i\sin y$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z}:$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \quad (\mathrm{I})$$

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\cdots$$

$$-\ln(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}\quad \ln(1+z)-\ln(1-z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \rightarrow \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=1-z^2+z^4-z^6+\dots$$

$$\arctan z=\int\frac{1}{1+z^2}dz=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\dots$$

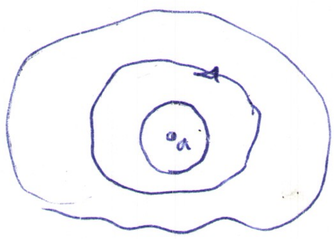
$f(z)=\dfrac{3z^2+2z+5}{(z-1)(z-2)^2}$ را حول [illegible] بسط دهید:

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-2)}+\frac{C}{(z-2)^2}$$

"Laurent"

سری لوران - حالت عمومی سری تیلور است.

• اگر بخواهیم تابع را در اطراف نقطه‌ای که تحلیلی نیست بسط دهیم در آن نقطه تابع یک بسط لوران پیدا می‌کند:



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n+\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

که تحلیلی نیست در رابطه این قسمت است. قسمت اصلی principle part

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}dz^* \quad , \quad C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint(z^*-a)^{n-1}f(z^*)dz^*$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{1-n}}dz^*$$

$$n=1 \rightarrow C_1=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z^*)dz^*$$

$$\rightarrow \oint f(z^*)dz^*=2\pi i C_1$$

C_1 را مانده $f(z)$ در $z=a$ گویند.

$[C_1=\operatorname{Res} f(z)]$ [illegible]

$$z^2 e^{1/z} = z^2\left[1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right] = z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!\,z}+\frac{1}{4!\,z^2}$$

$|z|>$

$\frac{1}{1-z}=?$,
$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-z^{-1})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots \qquad |z|>1$$

Find the Taylor and Laurent series of $f(z)=\frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ with center 0.

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}=\frac{-2z+3}{z^2-3z+2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=-2\\ -2A-B=3\end{cases}$$

$$A=B=-1 \to f(z)=\frac{-1}{z-1}-\frac{1}{z-2} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\to -\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad |z|<2 \quad (\mathrm{II})$$

$$-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>2 \quad (\mathrm{III})$$

(I), (II) $\to$ $|z|<1$

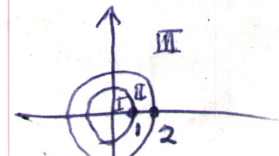
$$\to f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}z+\frac{9}{8}z^2+\cdots$$

$1<|z|<2$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$|z|>2$

$$\to f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\frac{1}{z^{n+1}}=-\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\cdots$$



Poles and Zeros or Singularities and Zeros

A Singular Point of an analytic function $f(z)$ is a z_0 at which $f(z)$ is not analytic.

A Zero is a z at which $f(z)=0$.

$$f(z)=\sum b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

اگر تعداد جملات با توان های منفی محدود باشد $\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_m}{(z-a)^m}$ به $z=a$ قطب مرتبه m ام گویند و اگر $m=1$ باشد، به آن قطب ساده گویند.

اگر توان های منفی نامحدود باشد به $z=a$ نقطه تکین اساسی گویند (Essential Singularity)

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}+\cdots$$

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots$$

قضیه مانده ها:

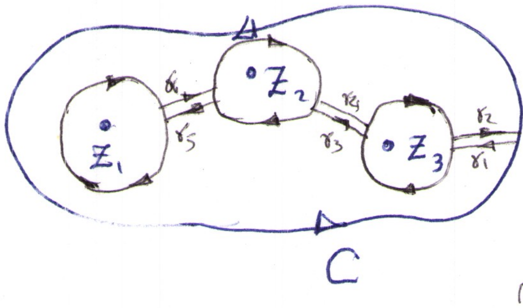
و در بقیه نقاط داخل منحنی c تحلیلی باشد

اگر $f(z)$ در a_1، a_2، ... تحلیلی نباشد انتگرال $\oint f(z)dz$ روی منحنی c به طوری که در برگیرد

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z)\Big|_{z=a_1,a_2,\ldots}$$

اگر $z=a_m$ خارج این منحنی باشد در حاصل انتگرال تاثیر ندارد.

اثبات به عهده [illegible]   [illegible] شکل



اثبات بر اساس شکل زیر

هر یک از نقاط تکین z_j را با دایرهٔ C_j

که شعاع آن به اندازه‌ای کوچک است محاط کنیم

حال $f(z)$ در بین C و همه C_jها درون C و z_jها تحلیلی است.

حال با استفاده از انتگرال کوشی

$$\oint_{C} f(z)\,dz + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \cdots \oint_{C_k} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_{2k}} f(z)\,dz = 0$$

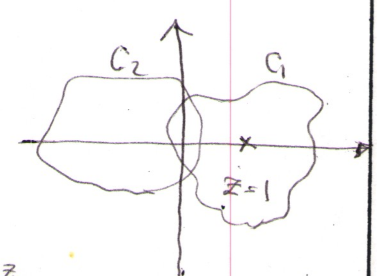
اگر شکاف‌ها به سمت صفر میل کنند

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z) + \oint_{C_2} f(z) + \cdots + \oint_{C_k} f(z)$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

$$= 2\pi i \sum_{z=z_1, z_2, \dots} \operatorname{Res} f(z)$$

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 0$$



$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=1}, \quad f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

$f(z)$ را حول $z=1$ بسط می‌دهیم:

$$\frac{e^z}{z-1} = \left(\frac{1}{z-1}\right)\left(e \cdot e^{z-1}\right) = e\left(\frac{1}{z-1}\right)\left(1 + z-1 + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e}{\ldots} + e + e(z-1) + (z-1)^2 \ldots$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = e = c_1 \rightarrow \oint_{C_1} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e$$

$$\oint \frac{\sin z}{z^4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}$$

C: دایره‌ی

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{5!} + \cdots$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \frac{-1}{3!}$$

$$\rightarrow \oint \frac{\sin z}{z^4}\,dz = 2\pi i \times \frac{-1}{3!} = \frac{-\pi i}{3}$$

چگونه می‌توان این مانده‌ها را پیدا کرد؟

تعیین c_1 را چگونه می‌توان یافت.

* راه ساده این است که بسط لوران را پیدا کنید.

• اگر قطب ساده داشته باشیم

$$F(z) = \frac{P(z)}{q(z)} = \sum_{0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \cdots$$

$$c_1 = \lim_{z \to a} (z-a) F(z)$$

if $P(a) \neq 0$, $q(z)$ has simple zero at $z=a$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res} \frac{P(z)}{q(z)} = c_1 = \frac{P(a)}{q'(a)}$$

$$F(z)=\frac{P(z)}{q(z)}=\frac{P(z)}{q(a)+(z-a)q'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}q''(a)+\dots}$$

صفر است $q(z)$ در $z=a$

$$\rightarrow c_1=\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)P(z)}{(z-a)q'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}q''(a)+\dots}=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{q'(a)+\frac{(z-a)}{2!}q''(a)+\frac{(z-a)^2}{3!}q'''(a)\dots}$$

$$\boxed{c_1=\lim\frac{P(a)}{q'(a)}}$$

$$f(z)=\frac{9z+i}{z^3+z}=$$

$$z^3+z=0\rightarrow z(z^2+1)=0\rightarrow z=0,\ z=\pm i$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=i}=\lim_{z\to i}(z-i)\cdot f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(9z+i)\cancel{(z-i)}}{z(z+i)\cancel{(z-i)}}=\frac{9z+i}{z(z+i)}\Big|_{z=i}=-5i$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=i}=\frac{9z+i}{(z^3+z)'}=\frac{9z+1}{3z^2+1}\Big|_{z=i}=\frac{9i+i}{3\times-1+1}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

• برای قطب مرتبه m ام

$$F(z)=\frac{P(z)}{q(z)}=\sum_0^\infty b_n(z-a)^n+\frac{c_1}{z-a}+\dots+\frac{c_m}{(z-a)^m}$$

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m F(z)=\sum b_m(z-a)^{(m+n)}+c_1(z-a)^{(m-1)}+c_2(z-a)^{m-2}+\dots+c_m$$

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m F(z)=c_m$$

برای رسیدن به c_1 که مطلوب ماست بایستی از طرفین m-1 بار مشتق بگیریم.

$$\rightarrow \frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m F(z)\right]}{dz^{m-1}} = (m-1)!\, c_1$$

$$\rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m F(z)\right]}{dz^{m-1}}}$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}\right)^5 + \dots$$

$c_1 = 1$ مانده برای تکین اساسی این مانطور

• تکین اساسی: تنها راه بدست آوردن مانده برای قطب تکین اساسی [قطب از مرتبه بی نهایت است]

استفاده از بسط لوران است.

$$\oint_{C:\,|z-1|=1} \frac{1}{(z^3-1)^2}\, dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z)$$

در قطعه رالفل دایره

$$z^3-1=0 \Rightarrow z^3 = 1 = e^{j2k\pi}, \quad z = e^{j\frac{2k\pi}{3}} = 1, e^{j\frac{2\pi}{3}}, e^{j\frac{4\pi}{3}}, \dots$$

$$\oint f(z)\, dz = 2\pi j \left[\begin{matrix}\text{مانده قطب در} \\ z=1\end{matrix}\right] = -\frac{4\pi}{9} i$$

قطب مرتبه ②

$$c_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z^3-1)^2}\right]_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+z+1)^2}\right]_{z=1}$$

$$= \left[\frac{-2(2z+1)(z^2+z+1)}{(z^2+z+1)^4}\right]_{z=1} = \frac{-2(2+1)(1+1+1)}{(1+1+1)^4} = \frac{-9\times 2}{9\times 9} = -\frac{2}{9}$$

محاسبه پاره‌ای از انتگرال‌های حقیقی معین

انتگرال از نوع .

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

تابع گویا از $\sin\theta, \cos\theta$

ایده این است که همواره یک انتگرال حقیقی را به انتگرال صفحه مختلط تبدیل کنیم

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$0 < \theta < 2\pi \longrightarrow z = 1 e^{i\theta} = 1 \text{ دایره‌ای به شعاع}$$

$$\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow dz = i z\, d\theta \,, \quad \boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}}$$

$$\rightarrow I = \oint_{\text{دایره واحد } C} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\text{قطب‌های داخل دایره واحد}} \operatorname{Res}\{f(z)\}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} \qquad a > b > 1$$

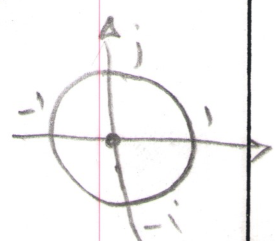
$\frac{1}{a+b\cos\theta}$ is a even function $\rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{a + \frac{b}{2}(z+\frac{1}{z})}$

$$= \oint \frac{dz}{i[2az + bz^2 + b]} = 2\pi i \sum \text{مانده‌ها} \Big|_{z = \text{قطب‌های داخل دایره } C}$$

$bz^2 + 2az + b = 0 \rightarrow P_1, P_2 = \frac{-a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$

$a > b > 1 \rightarrow P_1 = \frac{-a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \not> -1$ خارج دایره C

$\searrow P_2 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$



$\frac{c}{a} = P_1 P_2 = 1 \rightarrow P_1 > 1 \rightarrow P_2 < 1$

$P_1 \not< -1 \qquad P_2 \not> -1$

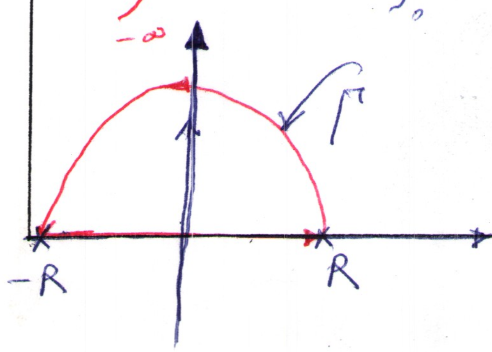
بنابراین P_2 داخل دایره است.

$$I = 2\pi i \times \frac{1}{i} \times \left[\frac{P}{2a + 2bz}\right]_{z = \frac{-a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ or $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$. وقتی f(x) در نامتناهی (صفر - قطب) نداشته باشد.

به جای انتگرال‌ها، انتگرال‌های سری improper می‌گیریم



$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz$$

$= 2\pi i \, \mathrm{Res}[f(z)] = \ldots$

$$\to R \longrightarrow \infty \quad : \quad \oint_C f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

در قطب های بالای محور x

حال تحت شرایطی $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$ خواهد بود و I به سادگی بدست می‌آید:

اگر $f(z)$ را از مرتبه $\frac{1}{z^k}$ در نظر بگیریم:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{M}{R^k} \times \pi R$$

$$\leqslant \frac{M\pi}{R^{k-1}}$$

حال اگر $k-1>0$ یا به عبارتی $k>1$ باشد وقتی که $R\to\infty$ میرود، انتگرال روی مسیر Γ به سمت صفر میل می‌کند

$$R\to\infty \longrightarrow R^{k-1} \longrightarrow \infty \longrightarrow \frac{M\pi}{R^{k-1}} \longrightarrow 0 \to \left|\int f(z)\,dz\right| \to 0$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6} \to f(z) = O\left(\frac{1}{z^6}\right) \Rightarrow k=6>1$$

$$\to I = \frac{1}{2}\oint \frac{dz}{1+z^6} = \frac{1}{2}(2\pi i)\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}\right]$$

قطبهای بالای محور

C: نیم‌دایره

$$z^6+1=0 \to z^6=-1 = e^{i2k\pi+i\pi} \to z = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$$

$k=0 \to z_1 = e^{i\pi/6}$ ✓ قطبهای بالای محور

$k=1 \quad z_2 = e^{i3\pi/6}$ ✓

$k=2 \quad z_3 = e^{i5\pi/6}$ ✓

$k=3 \quad z = e^{i7\pi/6}$

$k=4 \quad z = e^{i9\pi/6}$

$k=5 \quad z = e^{i11\pi/6}$

$$I = \frac{\pi i}{6}\left[\frac{1}{6z^5}\right]_{z=e^{i\frac{\pi}{6}},\, e^{i\frac{3\pi}{6}},\, e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

انتگرال‌ها از نوع

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx) f(x)\,dx \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(wx) f(x)\,dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} f(x)\,dx = I_c + i I_s = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos wx + i \sin wx) f(x)\,dx$$

انتگرال به مسیر نیم دایره‌ای مانند مسئله قبل، به این نتیجه می‌رسیم تحت چه شرایطی $\int_{\Gamma} e^{iwz} f(z)\,dz$ صفر می‌شود.

اگر $f(z) \sim O(\frac{1}{z^k})$ باشد، $k>0$ شرط لازم است $\int_{\Gamma} e^{iwz} f(z)\,dz$ صفر شود چون

e^{iwz} یک عبارت میرا کننده است ← $k>0$ کافیست!

$$|e^{iwz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{isz}||e^{-wy}| = 1 \cdot e^{-wy} \leq 1$$

$y>0$ ← بالای محور

$w>0$

$$|e^{iwz} f(z)| = |f(z)||e^{iwz}| \leq |f(z)| \qquad w>0,\ y>0$$

$$I = 2\pi i \sum R_{ez}\left[e^{iwz} f(z)\right]$$

فقط برای بالای محور

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{x^2+k^2}\,dx \qquad \omega>0,\ k>0$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{x^2+k^2}\,dx \quad \therefore \quad I'=\oint\frac{e^{i\omega z}}{z^2+k^2}\,dz$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+k^2}\sim O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

پس انتگرال روی قوس Γ در بینهایت صفر خواهد شد.

$$-I'=2\pi i R\left[\frac{e^{i\omega z}}{2z}\right]_{z=ik}=\frac{\pi}{k}e^{-\omega k}$$

$z^2+k^2=0 \to z=\pm ik \to z=ik$ قطب بالای محور

حالت ۲: $f(x)$ روی محور حقیقی قطب است:

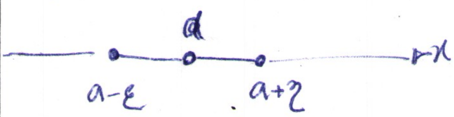
$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

اولین سوال اینه

آیا انتگرال معتبر است یا نه.

$$I=\int_A^B f(x)\,dx=\int_A^{a-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{a+\eta}^{B}f(x)\,dx$$

اگر $f(x)$ در $x=a$ قطب شد



$$I=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_A^{a-\varepsilon}f(x)\,dx+\lim_{\substack{B\to\infty\\ \eta\to0}}\int_{a+\eta}^{B}f(x)\,dx$$

اگر یکی از حدود بالا یا هر دو موجود نباشند، انتگرال معتبر نیست

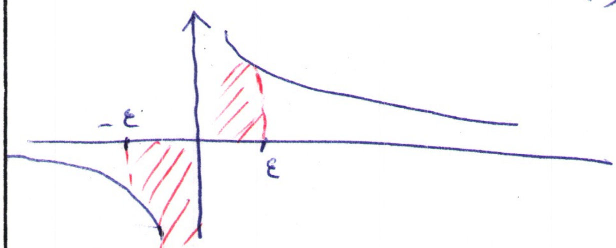
صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

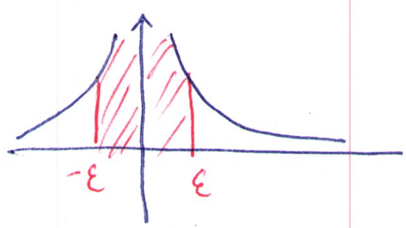
اگر x از چپ و راست با هم به سمت a میل کند ممکن است انتگرال موجود شود، اصطلاحاً آن را $pr.v.$ یا مقدار اصلی کوشی گوییم.

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}=\frac{-1}{2x^2}\Big|_{-1}^{1}=0=pr.v$$

$$=\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^3}+\int_{\varepsilon+0}^{1}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\frac{-1}{2x^2}\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

انتگرال وجود ندارد ولی مقدار اصلی کوشی وجود دارد.

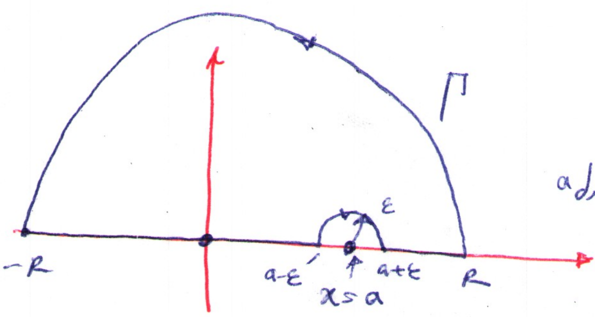




$\frac{1}{x^2}$ را

به مفهوم انتگرال کوشی وجود ندارد

وقتی قطب روی محور باشد مقدار اصلی کوشی را با مسیر مناسبی به دست آوردیم. اگر $x=a$ یک قطب ساده باشد مسیر به شکل زیر است.



γ: نیم دایره کوچک حول a : $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$

$\theta:\pi\to 0$

$$I=\int_{-R}^{a-\varepsilon}f(x)dx+\int_{a+\varepsilon}^{R}f(x)dx+\int_{\gamma}f(z)dz+\int_{\Gamma}f(z)dz=\oint_{C}f(z)dz=2\pi i\sum \text{Res}\, f(z)$$

داخل C

C

$R \to \infty$
$\varepsilon \to 0$ $\quad \to \quad I = \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma} f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum R_{es} f(z)$$

قطبهای بالای محور

آگر $f(z) = O(\frac{1}{z^k})$: حد ، اگر $k>1$: صفر است

$$\to I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum R_{es}(f(z))$$

قطبهای بالای محور

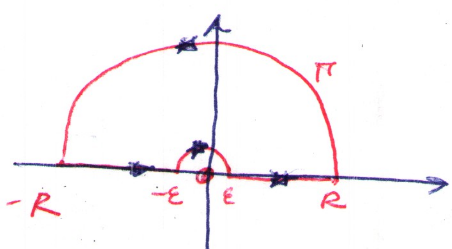
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma = a+\varepsilon e^{i\theta},\ \theta: \pi \to 0} f(z)dz = -\pi i R_{es} f(z)$$

$$\to \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum R_{es}(f(z)) + \pi i R_{es}[f(z)]\Big|_{z=a}}$$

قطبهای بالای محور

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx \Rightarrow \oint_C \frac{e^{imz}}{z} dz$$

$z=0$ یک قطب ساده است



$\gamma: z = \varepsilon e^{i\theta}$

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z} dz = \int_{-R}^{0-\varepsilon} \frac{e^{imx}}{x} dx + \int_{0+\varepsilon}^{R} \frac{e^{imx}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{imz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z} dz$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

$R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ $\longrightarrow$

$$\oint \frac{e^{imz}}{z}\,dz = I + \oint \frac{e^{im\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = 0$$

$z = \varepsilon e^{i\theta}$

$dz = i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$

چون تحلیلی بالای منحنی است .

$$= I + \int_{\pi}^{0} i\,e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta = I - \int_{0}^{\pi} i\,e^{im\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I = \int_0^{\pi} i\,d\theta = i\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{I = i\pi}$$

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \begin{cases} 2\pi i\,f(z_0) & \text{اگر } C \text{ نقطه } z_0 \text{ را دربرگیرد} \\ 0 & \text{اگر } C \text{ نقطه } z_0 \text{ را دربر نگیرد تابع همه جا تحلیلی است} \\ \pi i\,f(z_0) \ (\text{مقدار اصلی کوشی}) & \text{اگر } C \text{ از روی } z_0 \text{ عبور کند آنگاه} \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$$

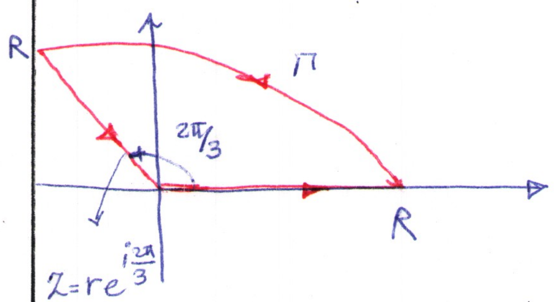
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}\,dx$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3},$$

$$I^* = \oint \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \sum Res(f_z)\Big|_{c}$$ قطب داخل c



$$I^* = \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} + \int_{\Gamma_0} \cancel{\frac{dz}{1+z^3}} + \int_{\Gamma_1 = re^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}dr}{1+r^3 e^{i2\pi}}$$

$R \to \infty$

$$I^* = I + 0 + \int_R^0 \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} dr}{1+r^3} = I + e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_R^0 \frac{dr}{1+r^3}$$

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \qquad = I - e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{dr}{1+r^3} = I - e^{i\frac{2\pi}{3}} I$$

$$\to I^* = I(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\pi i \left[Res\, f(z)\right|_c = 2\pi i \times \frac{1}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^3+1 = 0, \quad z^3 = -1 = e^{i(2k+1)\pi} \Rightarrow z = e^{i(\frac{2k+1}{3})\pi}$$

$k=0 \to z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ قطب داخل c

$k=1 \to z_2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: خارج c

$k=2 \to z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos(\pi + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) =$: خارج c

$$Res_z = \frac{1}{3z^2}\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

عنوان	تاریخ	مرجع	صفحه

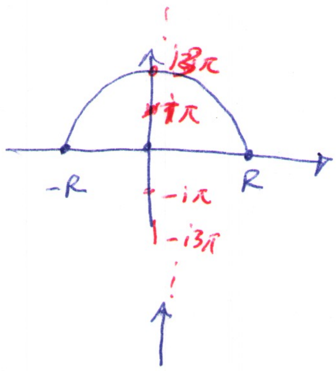
$$I\left(1-e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)=\frac{2\pi i}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$I=\frac{2\pi i\,e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}=\frac{2\pi i\left[\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right]}{1-\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}}=\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \qquad 0<a<1$$

$$I'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}\,dz \qquad \cancel{0<a<1} \;=2\pi i\,\mathrm{Res}\,\big[f(z)\big]_{z}$$

قطب های بالای محور

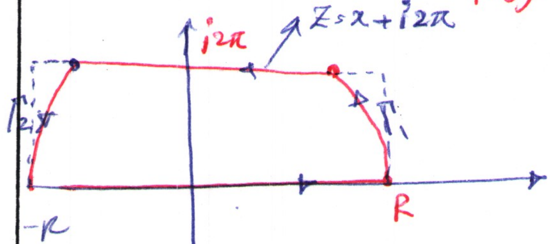


$$1+e^{z}=0\to e^{z}=-1=e^{i(2k+1)\pi}$$

$$z=i(2k+1)\pi\,,\quad z=\pm i\pi,\pm i3\pi,\pm i5\pi,\dots$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

چون قطبهای بالای محور x زیادی می‌شوند، مسیر را عوض می‌کنیم:



$$z=x+i2\pi,\quad dx=dz$$

$$I'=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+\int_{\Gamma_1,\Gamma_2}+\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^{x+i2\pi}}dx$$

$$\underset{R\to\infty}{I'}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+\int_{\Gamma_1,\Gamma_2}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz+\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{ax}\cdot e^{i2\pi a}}{1+e^{x}\cdot e^{i2\pi}}dx$$

$$O\left(e^{(a-1)z}\right)\to 0$$

$$I' = I + O\left(e^{(a-1)z}\right) + e^{ia2\pi}\left[-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx\right]$$

$x \to \infty$ $\quad a<1$

$$I' = I\left(1-e^{i2a\pi}\right) = 2\pi i\left[\frac{e^{az}}{e^{z}}\right]_{z=i\pi}$$

قطب داخل مسیر

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{i2a\pi}}\left[\frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{\cancel{e^{ia\pi}}\,\underbrace{\left[e^{-ia\pi}-e^{ia\pi}\right]}_{-2i\sin\pi a}}\;\frac{\cancel{e^{ia\pi}}}{\underbrace{e^{i\pi}}_{-1}} = \frac{2\pi i}{2i\sin\pi a} = \boxed{\frac{\pi}{\sin\pi a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi a}$$

$\cosh x$, $\sinh x$

* برای توابع نمایی و توابع رشد Sin ، Cos و ... مسیرهای مستطیلی مناسب است.

همچنین توابع Sinx و Cos نیز تابعی از توابع نمایی هستند

• این مسیر را نتوانسته از $z=ai\pi$ نیز عبور داد.

$$I=\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$$

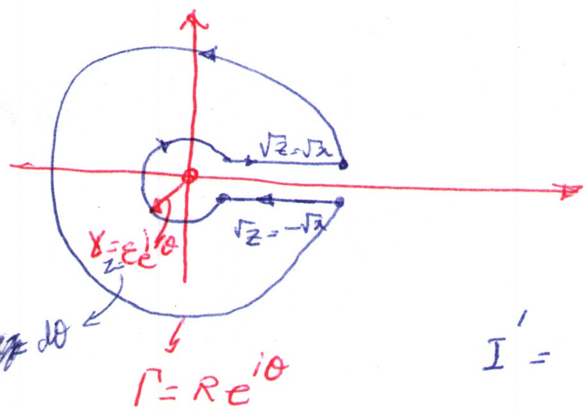
$$I'=\oint \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz$$

به طور کلی اگر عباراتی نظیر $\sqrt{\ }$ ، $\ln(\dots)$ ، $\sinh^{-1}(\dots)$ و $\cosh^{-1}(\dots)$ داشته باشیم

مقادیری از z که عبارت زیر رادیکال و بقیه صفر گردد نقاط انشعاب گویند.

$z=xe^{i0} \rightarrow \sqrt{z}=\sqrt{x}\ ,\ \ln z=\ln x$

$z=xe^{i2\pi} \rightarrow \sqrt{z}=\sqrt{x}\,e^{i\pi}=-\sqrt{x}\ ,\ \ln z=\ln x+i2\pi$



$z=\varepsilon e^{i\theta}$

$dz=i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$

$$I'=\oint \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]$$

قطب ساده z

$$I'=\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx+\int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz+\int_R^\varepsilon \frac{-\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx+\int_\gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{R\to\infty} I'=\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx+\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz+\int_R^0 \frac{-\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx+\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_\gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\,dz$$

$O(z^{\frac{1}{2}-2})$ $\quad z=\varepsilon e^{i\theta}$

$$I'=I+0+I+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon}\,e^{i\theta}}{1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \rightarrow 0 \qquad \left(\frac{\varepsilon^{1/2}\cdot\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)^{2/2}$$

$I'=2I$

صفحه	مرجع	تاریخ	عنوان

$$I' = 2I = 2\pi i \sum \frac{\sqrt{z}}{2z}\Bigg|_{z=\pm i} = 2\pi i\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} + \frac{e^{i3\pi/4}}{2 \cdot e^{i3\pi/2}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^2+1=0 \rightarrow z=\pm i \\ \cancel{\sqrt{z}} = z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \sqrt{z} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z=-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}, \quad \sqrt{z} = \sqrt{e^{i3\pi/2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{array}\right\}$$

$$I' = 2I = 2\pi i\left[\frac{e^{i\pi/4}}{2i} - \frac{e^{i3\pi/4}}{2i}\right] = \pi\left[e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i3\pi/4}\right]$$

$$= \pi\left(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4 - \cos 3\pi/4 - i\sin 3\pi/4\right)$$

$$\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] = \pi\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \boxed{I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$