In the name of God

Eng. Math. Prof. : Dr. Valipour Due Date: 06.06.1399 Summer 2020

۱. تابع $f(x,y)=x^3y-y^3x+y^2-x^2+x$ را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید این تابع می‌تواند قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی باشد. ب) اگر قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی باشد، قسمت موهومی متناظر را بدست آورید. ج) اگر قسمت موهومی یک تابع تحلیلی باشد، قسمت حقیقی متناظر را بدست آورید. د) اگر $\phi(x,y)+iv(x,y)$ ، $u(x,y)+i\phi(x,y)$ توابع تحلیلی و $\phi(x,y)$ یک تابع دلخواه باشند، نشان دهید با صرف نظر از ثوابت ظاهر شده در توابع u و v رابطه $u=-v$ برقرار است. طبق نتیجه قسمت د، نتایج قسمت‌های ب و ج را تحلیل و مقایسه کنید.

۲. تحلیلی بودن تابع $f(z)=\log(\log(z))$ را بررسی کنید.

۳. محدوده تحلیلی بودن تابع $f(z)=\dfrac{1}{\cosh[(1+i)z]}$ را تعیین کنید.

۴. مقدار i^{-i} را بدست آورید.

۵. انتگرال $\int_i^1 \bar{z}dz$ را روی مسیرهای ذیل بدست آورید: الف) $x+y=1$ ، ب) $y=1-x^2$

نتایج قسمت‌های الف و ب را با یکدیگر مقایسه کنید و دلیل تفاوت را بیان کنید.

۶. مقدار انتگرال را به ازای تمامی اعداد صحیح (n) بدست آورید:

$$\oint_{|z|=1} z^n dz$$

۷. ثابت کنید که: $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{1-a\cos(\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}d\theta=2\pi;\quad |a|<1\quad ,a\in\Re$

راهنمایی: از انتگرال زیر استفاده کنید

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-a}dz;\ z=e^{i\theta}$$

۸. مقدار انتگرال را روی مسیر مربعی که رئوس آن در نقاط $\pm1\pm i$ قرار گرفته‌اند تعیین کنید.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c z\sin(\frac{1}{z})dz$$

۹. به کمک قضیه ماندهها حساب کنید:

$$I = \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2} (n-1)(z-1)^n dz\,;\ \ c: |z| = 2.$$

۱۰. قطبها و مرتبه آنها را مشخص کنید (شاخه اصلی تابع لگاریتم را از برش(حذف) محور xهای منفی از صفحه مختلط در نظر بگیرید):

$$f(z) = \frac{1}{\left(\log(z) - i\pi\right)\left(\sqrt{z} - 1\right)}$$

۱۱. تمامی قطبها و ماندههای تابع $f(z) = \dfrac{\sin(z) - z}{z\,\sinh(z)}$ را در صفحه مختلط تعیین کنید.

۱۲. مقدار انتگرال زیر را روی مسیر مشخص شده تعیین کنید:

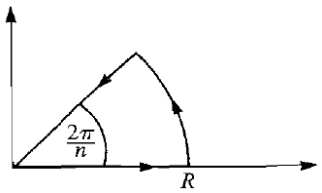
$$I = \oint_c \frac{dz}{\sin(\sqrt{z})}\ ;\ \ c: |z - 9| = 5.$$

13. $I = \int_0^{\pi} \sin^5(\theta)\sin(5\theta)\,d\theta = ?$

14. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 1} dx = ?$

۱۵. ثابت کنید: $I = \int_0^{\infty} \dfrac{x^m}{x^n + 1} dx = \dfrac{\pi}{n \sin\left[\pi(m+1)/n\right]};\quad m, n \in Z;\quad n - m \geq 2$

راهنمایی: از کانتور نشان داده شده در شکل استفاده کنید.



۱۶. به کمک تابع $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z}$ و انتگرال‌گیری روی کانتوری که تمام نیم‌صفحه فوقانی صفحه مختلط را در بر می‌گیرد، مقدار انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$ را محاسبه کنید. (راهنمایی: نشان دهید z=0 نقطه منفرد (قطب) قابل حذف است.)

۱۷. مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3x)}{x-1}dx$$

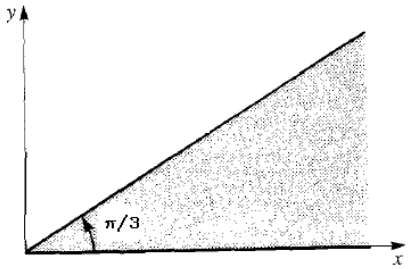
۱۸. ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^4+x^2+1}dx=-\frac{\pi^2}{12}$$

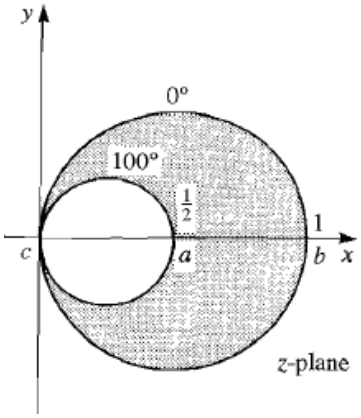
۱۹. نگاشت دوخطی را بیابید که نقاط 1 و i و 0 را به نقاط 0 و 1- و i تصور نماید.

۲۰. نگاشتی را بدست آورید که ناحیه سمت چپ خط z=1 را به داخل دایره واحد به مرکز مبدا مختصات تصویر نماید.

۲۱. نگاشتی که ناحیه گوه مانند را به ناحیه داخلی دایره واحد تبدیل می‌کند را بدست آورید.

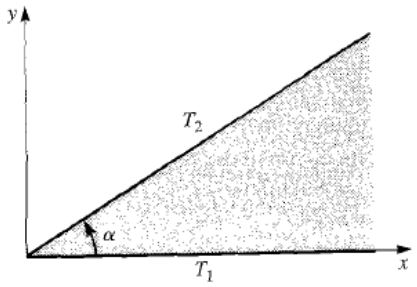


۲۲. توزیع دما در بین دو دایره را بدست آورید.



۲۳. توزیع دما داخل جسم گوه شکل را بدست آورید.

راهنمایی: از تبدیل w=log(z) استفاده کنید تا هندسی ساده‌تر شود. سپس توزیع دمای حدسی را به فرم $\phi(u,v)=Au+B$ در نظر بگیرید که A و B ثوابت و u و v همان دستگاه مختصات تبدیل یافته $w=u+iv$ هستند.



۲۴. نشان دهید توضیع دمای مختلط در شکل نشان داده شده به صورت زیر است:

$$\Phi(z)=\frac{100}{\pi}\sin^{-1}(z^2)+50; \quad \frac{-\pi}{2}<\mathrm{Re}[\sin^{-1}(...)]<\frac{\pi}{2}$$