نمره تمرین‌ها ۲۵

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin\omega t \qquad 0<x<1,\ t>0.$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = u_0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

برای بدست آوردن توابع ویژه اول معادله همگن را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow u = F(x)G(t)$$

$$F\ddot{G} = F''G \xrightarrow{\div FG} \frac{\ddot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = \begin{cases} K^2 \\ 0 \\ -K^2 \end{cases}$$

K^2، 0 قابل قبول نیست و به پاسخ بدیهی منجر می‌شود.

$$\frac{F''}{F} = -K^2 \longrightarrow F'' + K^2F = 0 \longrightarrow F(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

B.C.

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \longrightarrow F(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(1,t) = F(1)G(t) = 0 \longrightarrow F(1) = 0 \qquad F(1) = B\sin k = 0,\ B \neq$$

$$\sin k = 0 \longrightarrow \boxed{K_n = n\pi}$$

مقادیر ویژه $K_n = n\pi$

توابع ویژه $\boxed{F_n(x) = B_n \sin n\pi x}$

۵ (2)

بنابراین فرض می‌کنیم پاسخ $u(x,t)$ به فرم زیر برحسب توابع ویژه نوشته شود:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin n\pi x} \qquad (1)\ ۱$$

$G_n(t)$ مجهول بوده و بایستی محاسبه شود.

7

حال بسط $\sin\omega t$ را بر حسب توابع ویژه بسط دهیم

$$\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\sin n\pi x$$

حال ضریب $P_n(t)$ را محاسبه کنیم. لذا $\sin\omega t$ را بر حسب صورت فرد در نیمه $[0,1]$ گسترش دهیم:

$$P_n(t) = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin\omega t\,\sin n\pi x\,dx = 2\sin\omega t\int_0^1 \sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\sin\omega t\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 = -\frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & n = \text{even} \\ \dfrac{4\sin\omega t}{n\pi} & n = \text{odd} \end{cases}$$

$$\boxed{\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]\sin n\pi x} \quad \text{I}$$

۱۴

۵

حال تابع جواب معادله کلی را بر حسب تابع $u(x,t)$ بنویسیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(n\pi x)$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin n\pi x \quad \text{II}$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -G_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{III}$$

IV

I, II, III را در معادله اصلی می‌گذاریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{G}_n(t)\sin n\pi x = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)(n\pi)^2\sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]\sin n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{G}_n(t) + (n\pi)^2 G_n(t) - \frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]\right]\sin n\pi x = 0$$

$$\ddot{G}_n(t) + (n\pi)^2 G_n(t) = \frac{2\sin\omega t}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$n = b\,3$

این معادله شامل یک پاسخ عمومی و یک پاسخ خصوصی است. ۳ ۵

پاسخ عمومی از معادله همگن بدست آید:

$$\ddot{G}_n(t) + (n\pi)^2 G_n(t) = 0 \longrightarrow y_h(t) = a_n \sin(n\pi t) + b_n \cos(n\pi t)$$

$$\lambda_n^2 + n\pi^2, \quad \lambda_n = \pm i n\pi$$

۲ ۲

برای یافتن y_p پاسخ خصوصی

$$y_p(t) = \alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t$$

$$y_p'(t) = \alpha\omega \cos\omega t - \beta\omega \sin\omega t$$

$$y_p''(t) = -\alpha\omega^2 \sin\omega t - \beta\omega^2 \cos\omega t$$

$$\left(-\alpha\omega^2 + n^2\pi^2\alpha\right)\sin\omega t + \left(-\beta\omega^2 + \beta n^2\pi^2\right)\cos\omega t = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]\sin\omega t$$

از این معادله

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \dfrac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)} \end{cases} \longrightarrow y_p(t) = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)}\sin\omega t$$

۳ ۴

$$G_n(t) = a_n \sin(n\pi t) + b_n \cos(n\pi t) + \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)}\sin\omega t$$

۱ ۲

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \sin(n\pi t) + b_n \cos(n\pi t) + \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)}\sin\omega t\right]\sin n\pi x$$

۱ ۲

برای یافتن a_n و b_n از شرایط مرزی و اولیه استفاده می‌شود.

$$u(x,0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \xrightarrow[\text{در بازه } [0,1]]{\text{گسترش فرد } u_0} b_n = 2\int_0^1 u_0 \sin(n\pi x)\, dx$$

$$b_n = 2u_0 \int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx = \boxed{\frac{2u_0}{n\pi}[1-\cos n\pi]}$$ ۳ ۲

$$u_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \lambda_n \cos \lambda_n t \cancel{- b_n \lambda_n \sin \lambda_n t} + \frac{2(1-\cos n\pi)\omega}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)} \cos \omega t\right] \sin n\pi x$$ $t=0$

$$\lambda_n = n\pi$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \lambda_n + \frac{2(1-\cos n\pi)\omega}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)}\right] \sin n\pi x$$

$$a_n = \frac{-2(1-\cos n\pi)\omega}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-\omega^2)} = \boxed{\frac{(1-\cos n\pi)\omega}{n^2\pi^2(\omega^2-n^2\pi^2)}}$$ ۳ ۳

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos n\pi)\omega}{n^2\pi^2(\omega^2-n^2\pi^2)} \sin(n\pi t) + \frac{2u_0}{n\pi}[1-\cos n\pi]\cos(n\pi t) + \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(n^2\pi^2-\omega^2)} \sin \omega t \Big] \sin n\pi x$$ ۲

حال اگر $\omega^2 - n^2\pi^2 = 0$ باشد یعنی فرکانس تحریک $\omega = n\pi$ باشد، پاسخ $u(x,t)$ بی‌نهایت می‌شود و پاسخ کراندار نخواهد بود. ۲ ۳ ۳