الف - نشان دهید که تابع $u(x,y) = e^x(x\sin x + y\cos y)$ هارمونیک است؟ سپس تابع هارمونیک مزدوج آن $v(x,y)$ را پیدا کنید؟ سپس تابع تحلیلی $F(z)$ که u جزء حقیقی و v جزء مجازی آن باشد را بیابید.

$u = e^x x\sin y + e^x y\cos y$

$u(x,y)$ وقتی هارمونیک است که در معادله لاپلاس صدق کند

$\nabla^2 u \overset{?}{=} 0 \longrightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x x\sin y + e^x \sin y + e^x y\cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x x\sin y + e^x\sin y + e^x \sin y + e^x y\cos y \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x x\cos y + e^x\cos y - e^x y\sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x x\sin y - e^x\sin y - e^x\sin y - e^x y\cos y \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

پس تابع $u(x,y)$ هارمونیک است.

شرایط کوشی ریمان : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$e^x x\sin y + e^x\sin y + e^x y\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$v(x,y) = -e^x x\cos y - e^x\cos y + e^x\int y\cos y\, dy + P(x)$$

$$\int y\cos y\, dy = y\sin y - \int \sin y\, dy = y\sin y + \cos y$$

$\cos y\, dy = dv \rightarrow v = \sin y$

$y = u \rightarrow dy = du$

$$v(x,y) = -e^x x\cos y - \cancel{e^x\cos y} + e^x y\sin y + \cancel{e^x\cos y} + P(x) = -e^x x\cos y + e^x y\sin y + P(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow -e^x x\cos y - e^x\cos y - \cancel{e^x\cos y} + e^x y\sin y + \cancel{e^x\cos y} + \frac{dP}{dx}$$

$$= -e^x x\cos y - e^x\cos y + e^x y\sin y$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 , \quad P = Const = c$$

۴

$$v(x,y) = -e^x x\cos y + e^x y\sin y$$

$$F(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$= e^x x\sin y + e^x y\cos y + i\left(-e^x x\cos y + e^x y\sin y\right)$$

برای بدست آوردن $F(z)$ ، $y=0$ قرار داده و $x \to z$ تبدیل می‌کنیم

$$F(z) = -ie^z z$$

۵

$$= -i\left[e^{x+iy}\cdot(x+iy)\right] = -i\left(e^x\cdot e^{iy}(x+iy)\right)$$

$$= -i$$

$$= -i\, x e^x e^{iy} + e^x e^{iy} y$$

$$= -i\, x e^x(\cos y + i\sin y) + e^x y(\cos y + i\sin y)$$

$$= -ixe^x\cos y + xe^x\sin y + e^x y\cos y + i\sin y\, e^x y$$

$$= xe^x\sin y + e^x y\cos y + i\left(-xe^x\cos y + \sin y\, e^x y\right)$$