انتگرال زیر را محاسبه کنید (پایان ترم دانشگاه بستان آباد ۹۴)

$$I_s=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx$$

تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x(1+x^2)}$ در $x=0$ بر روی محور قطب دارد بنابراین این انتگرال، به مفهوم مقدار اصلی کوشی $Pr.V.$ جواب خواهد داشت. به جای محاسبه این انتگرال، ما انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x(1+x^2)}\,dx$$

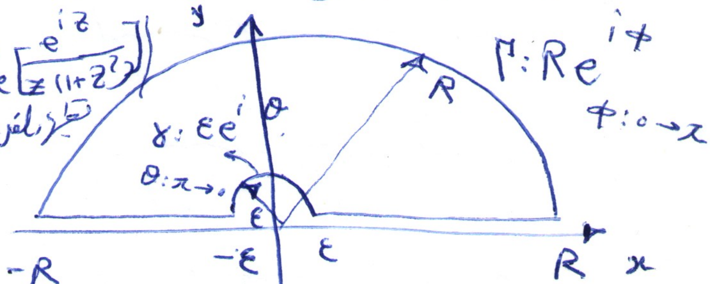
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x(1+x^2)}\,dx}_{I_c}+i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx}_{I_s}$$

$$=I_c+iI_s$$

که پاسخ انتگرال مورد نظر ما، همان I_s خواهد بود

مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\,dz=2\pi i\sum \underbrace{R_e\left[\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\right]}_{\text{قطب روی مسیر}}$$



$$\Rightarrow \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}\,dx+\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}\,dx+\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\,dz+\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\,dz=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}2\pi i\sum \underbrace{R_e\left[\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\right]}_{\text{قطب روی مسیر}}$$

$$\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\,dz+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\,dz=2\pi i\sum \underbrace{R_e\left[\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\right]}_{\text{تکینگی روی محور x ها}}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}dx}_{I}+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz}_{\alpha}+\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz}_{\beta}=2\pi i\sum R_e\left[\frac{e^{iz}}{(1+z^2)z}\right]$$

نقاط روی محور x ها

$$\alpha=\lim_{\substack{\gamma:\varepsilon e^{i\theta}\\ \varepsilon\to 0}}\int\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}(1+\varepsilon^2e^{i2\theta})}\cdot\cancel{\varepsilon}i\cancel{e^{i\theta}}d\theta$$

$z=\varepsilon e^{i\theta}$

$dz=\varepsilon i e^{i\theta}d\theta$

$\theta:\pi\to 0$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{(1+\varepsilon^2e^{i2\theta})}i\,d\theta=\int_{\pi}^{0}i\,d\theta$$

$$=\boxed{-\pi i}$$

یا

$$\lim\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz=-\pi i\sum R_e\left[\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\right]_{z=0}$$

قطب روی محور : $z=0$

$$=-\pi i\left[\frac{e^{iz}}{1+3z^2}\right]_{z=0}=-\pi i$$

$$\beta=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz\Rightarrow f(z)\sim\frac{e^{iz}}{z^3}\ ,\ 3>1\Rightarrow 0$$

یا

$$\lim\left|\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z+z^3}dz\right|<\lim_{R\to\infty}\left|\frac{e^{-R}M}{R^3}\right|\cdot\pi R=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi Me^{-R}}{R^2}\to 0$$

$$I - \pi i + 0 = 2\pi i \sum R_e\left[\frac{e^{iz}}{(1+z^2)z}\right]$$

قطبی روی محور x ها

بنابراین

کاب قطبها

$$z(1+z^2) = 0 \begin{cases} \to z = 0 \\ \to z^2+1 = 0 \to \underline{z = \pm i} \end{cases}$$

بنابراین قطب بالای محور x ها

$$\underline{\underline{z = i}}$$

$$R_e\left[\frac{e^{iz}}{z^3+z}\right]\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{iz}}{3z^2+1}\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{-3+1} = \frac{1}{-2e}$$

محاسبه مانده

$$I - \pi i = 2\pi i \frac{1}{-2e} = \frac{-\pi i}{e}$$

$$I = \pi i - \frac{\pi i}{e} = i\pi\left[1 - \frac{1}{e}\right] = I_c + i I_s \begin{cases} \to I_c = 0 \\ \to I_s = \pi\left[1 - \frac{1}{e}\right] \end{cases}$$

$$I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx = \boxed{\pi\left[1 - \frac{1}{e}\right]}$$