-۱

الف- انتگرال زیر را با مسیر مناسب و با استفاده از قضیه مانده ها بدست آورید؟

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{\cosh x}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} \qquad I' = \oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz$$

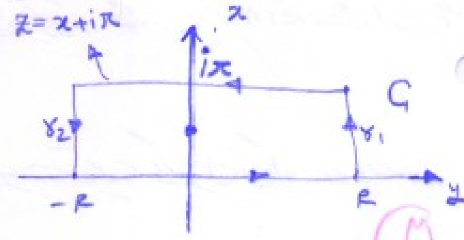
to find the Poles: $\cosh z = 0 \rightarrow \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = 0 \rightarrow e^{z}+e^{-z} = 0$

$$e^{2z}+1=0 \longrightarrow e^{2z} = -1 = e^{i(2k+1)\pi} \Rightarrow 2z = i(2k+1)\pi \,,\; z = \frac{i(2k+1)\pi}{2}$$

$$z = \frac{i\pi}{2}, \frac{i3\pi}{2}, \frac{i5\pi}{2}, \dots \qquad 3 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$-\frac{i\pi}{2}, -\frac{i3\pi}{2}$$

می‌نویسیم قطب بالای محور حقیقی ... در انتخاب مسیر دقت کرده و مسیر مطابق زیر را انتخاب می‌کنیم



3

$$\oint \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz = 2\pi i \sum R_{ez}\Big|_{z = \text{قطب‌های داخل مسیر}} = 2\pi i \sum R_{ez} f(z)\Big|_{z=\frac{i\pi}{2}} \quad \dots (1)$$

1

طرف اول: $\displaystyle\oint \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz + \int_{R}^{-R} \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz$

$z = x + i\pi$
$dz = dx$

$$\underset{R\to\infty}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx + 0 + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{ix}e^{-\pi}}{\cosh(x+i\pi)}\,dx$$

$$\left\{ \cosh(x+i\pi) = \frac{e^{(x+i\pi)}+e^{-(x+i\pi)}}{2} = \frac{e^{x}e^{i\pi}+e^{-x}\cdot e^{-i\pi}}{2} = -\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = -\cosh x \right\}$$

$$\oint \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx + e^{-\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx$$

7

$$= \left(1+e^{-\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx \quad \dots (2)$$

از (۲) $\longrightarrow$ $$2\pi i \sum R_{ez}\, f(z)\Big|_{z=\frac{i\pi}{2}} = 2\pi i\, R_{ez}\left(\frac{e^{iz}}{\cosh z}\right)_{z=\frac{i\pi}{2}}$$

$$= 2\pi i\, \frac{e^{iz}}{\sinh z}\Big|_{z=\frac{i\pi}{2}} = 2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sinh(\frac{i\pi}{2})}\right)$$

$$\left\{ \sinh(-\tfrac{i\pi}{2}) = \frac{e^{+i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} + i}{2} = +i \right\} \qquad = 2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$$

۱

... (۴)

۲، ۳، (۱) $\longrightarrow$ $$(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx = 2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} = \frac{2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{\cosh x}$$

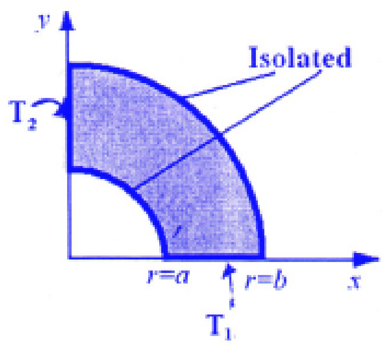
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\cosh x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2\cosh\frac{\pi}{2}}}$$

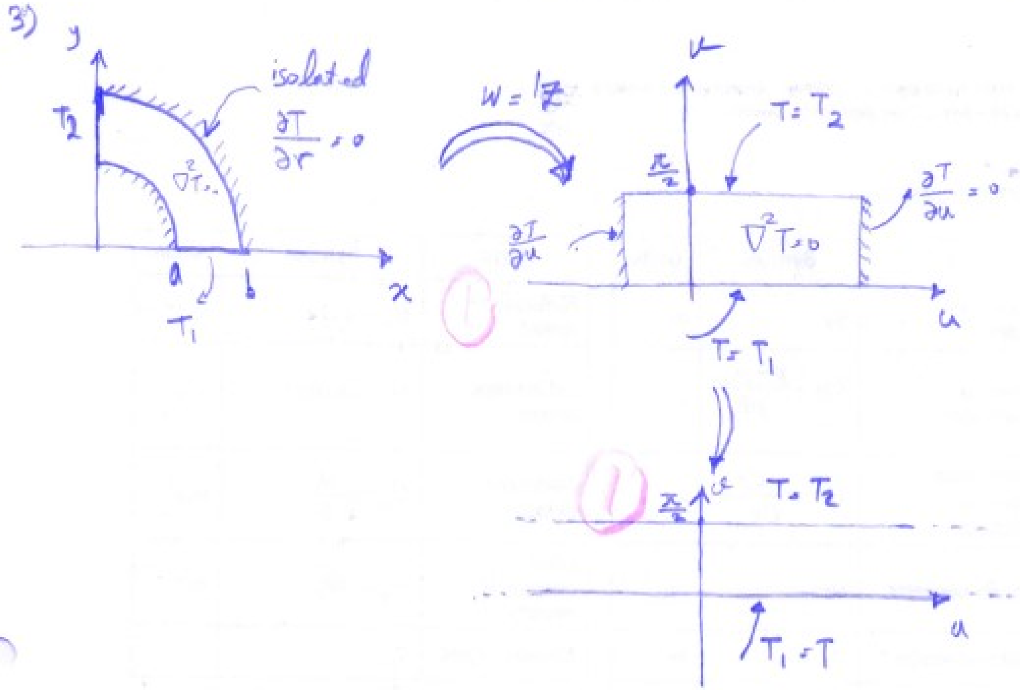
۳

۳- حالت پایای معادله انتقال حرارت را برای ناحیه نشان داده شده بدست آورید. (راهنمایی: با نگاشت مناسب فضا را بین دو صفحه موازی تبدیل و مسئله را حل کنید).



۵

3)



$$W=\ln z=\ln r+i\theta \qquad z=re^{i\theta} \longrightarrow \begin{cases} u=\ln r, & v=\theta \\ a<r<b & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$r=a \longrightarrow u=\ln a \qquad , \quad \theta=0 \longrightarrow v=0$$

$$r=b \longrightarrow u=\ln b \qquad \theta=\frac{\pi}{2} \longrightarrow v=\frac{\pi}{2}$$

چون در راستای u تغییرات دما نداریم بنابراین معادله لاپلاس به فرم زیر تبدیل می شود

$$\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}=0 \longrightarrow T=Av+B$$

$$\begin{cases} T=T_1 \\ v=0 \end{cases} \longrightarrow T_1=A\times 0+B \longrightarrow B=T_1$$

$$\begin{cases} T=T_2 \\ v=\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow T_2=A\times\frac{\pi}{2}+T_1 \longrightarrow A=\frac{(T_2-T_1)2}{\pi}$$

$$T=\frac{2(T_2-T_1)}{\pi}v+T_1 \xrightarrow{\theta=v=tg^{-1}\frac{y}{x}} T=\frac{2(T_2-T_1)}{\pi}tg^{-1}\frac{y}{x}+T_1$$